

# Fuzzy-Systeme mit inhärenter Dynamik: ein Überblick

## A Survey on Fuzzy Systems with Inherent Dynamics

Jürgen Adamy und Roland Kempf

Fuzzy-Systeme sind im Allgemeinen statische Systeme. Des Weiteren lassen sich aber auch dynamische Systeme direkt durch Fuzzy-Funktionen und Regeln beschreiben. Ihre Dynamik ist dabei inhärent und wird nicht durch das Gewichten von dynamischen Modellen wie im Falle von Takagi–Sugeno–Kang-Systemen erreicht, sondern durch direkte Rückführung der Ausgangsgrößen eines Fuzzy-Systems. In diesem Beitrag werden vier verschiedene, zentrale Ansätze für Fuzzy-Systeme mit inhärenter Dynamik behandelt: rekurrente Fuzzy-Systeme, dynamische Fuzzy-Systeme, iterierte Fuzzy-Mengen und Fuzzy-Automaten.

Fuzzy systems are static systems in general. However, dynamic systems may also be described directly by means of fuzzy functions or rules. Their dynamics is thus inherently given and is not obtained by weighting externally given dynamic models such as in the case of Takagi–Sugeno–Kang systems but by feeding back the output value of a fuzzy system. In this article four different major setups for fuzzy systems with inherent dynamics are treated: recurrent fuzzy systems, dynamic fuzzy systems, iterated fuzzy sets and fuzzy automata.

**Schlagwörter:** Rekurrentes Fuzzy-System, dynamisches Fuzzy-System, iterierte Fuzzy-Mengen, Fuzzy-Automat, TSK-System, zeitdiskretes System

**Keywords:** Recurrent fuzzy system, dynamic fuzzy system, iterated fuzzy sets, fuzzy automaton, TSK-system, discrete time system

## 1 Einführende Übersicht

Seit Einführung der Fuzzy-Logik im Jahre 1965 durch Zadeh [92] ist eine Fülle von darauf beruhenden Publikationen entstanden. Fuzzy-Logik kann u. a. als Verallgemeinerung der klassischen Logik aufgefasst werden, zur mathematischen Modellierung sprachlich formulierten Kausalwissens und als Funktionsapproximator genutzt werden. Fuzzy-Systeme werden in der Mathematik [10], den Ingenieurwissenschaften [27; 28; 35] und anderen Wissenschaftszweigen [78] verwendet. Anwendungsfelder sind u. a. Regelung, Modellierung, Diagnose, Mustererkennung und Expertensysteme [35; 61; 79]. Die dabei eingesetzten Fuzzy-Systeme sind meist statisch.

Im Zusammenhang mit dynamischen Systemen wird Fuzzy-Logik häufig zur Erzeugung von statischen Kennfeldern verwendet, die zwischen verschiedenen dynamischen Systemen interpolieren [59; 77]. Beim verbreiteten Ansatz von Takagi, Sugeno und Kang [73; 77] beispielsweise erzeugt das eingesetzte Fuzzy-System das dynamische Verhalten nicht selbst, sondern gewichtet mittels Fuzzy-Regeln

klassische dynamische Systeme, also Differenzgleichungen oder Differentialgleichungen.

Allerdings lassen sich dynamische Zusammenhänge auch allein durch Fuzzy-Methoden beschreiben. Die so gebildeten Fuzzy-Systeme besitzen dann eine inhärente Dynamik. Der Beitrag gibt einen Überblick über verschiedene Ansätze, die zu solchen Systemen führen. Dabei wurde der Fokus auf zeitdiskrete Systeme gelegt.

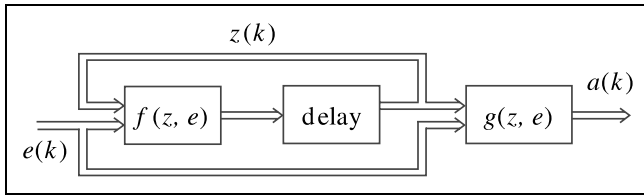
## 2 Allgemeine zeitdiskrete Systeme

Ein zeitdiskretes System ist durch eine Funktion  $f : Z \times E \rightarrow Z$ , eine Ausgangsfunktion  $g : Z \times E \rightarrow A$  und die Gleichungen

$$z(k+1) = f(z(k), e(k)) \quad (1)$$

$$a(k) = g(z(k), e(k)) \quad (2)$$

festgelegt. Ein Blockschaltbild zeigt Bild 1. Das System bildet die Eingangsgrößen  $e(k) \in E$  und Zustandsgrößen



**Bild 1:** Blockschaltbild eines allgemeinen zeitdiskreten dynamischen Systems.

$z(k) \in Z$  auf neue Zustandsgrößen  $z(k+1) \in Z$  ab. Die Ausgangsfunktion  $g$  bestimmt aus den Zustandsgrößen  $z(k)$  und den Eingangsgrößen  $e(k)$  die Ausgangsgrößen  $a(k) \in A$ . Die Ausgangsfunktion  $g$  ist in der Regel analog zur Funktion  $f$  aufgebaut. Sie spielt für die Dynamik des Systemzustandes keine Rolle und wird daher im Weiteren nicht mehr explizit betrachtet.

Die hier verwendete Notation,  $e$ ,  $z$  und  $a$ , für die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen weicht von der üblichen ab. Dies mindert die Verwechslungsgefahr, wenn später im Text diese Größen mit sehr unterschiedlichen Objekten belegt werden. Das können z. B. Mengen oder Matrizen sein, die deshalb weder fett noch unterstrichen dargestellt werden.

Je nach Definitionsbereich und Funktionstyp unterscheidet man verschiedene zeitdiskrete Systeme:

Häufig sind die Definitionsbereiche  $Z$  und  $E$  für die Zustandsgrößen  $z$  und Eingangsgrößen  $e$  Teilmengen von reellen Vektorräumen, z. B. bei Abtastsystemen. Bei der Verwendung linearer Funktionen  $f$  und  $g$  ergeben sich lineare zeitdiskrete Systeme, bei nichtlinearen Funktionen entsprechend nichtlineare zeitdiskrete Systeme. Nichtlineare Systeme unterscheidet man weiter nach ihrem Ursprung und ihren Eigenschaften. Werden z. B. neuronale Netze für  $f$  und  $g$  eingesetzt, so ergeben sich rekurrente neuronale Netze [25].

Sind die Mengen  $Z$  und  $E$  endliche Mengen, so stellt das zeitdiskrete dynamische System einen endlichen Automaten [11; 17] dar. Die Abbildungen  $f$  und  $g$  lassen sich in diesem Fall durch logische Schaltfunktionen darstellen, die auf einer zweiwertigen oder mehrwertigen Logik mit endlich vielen Wahrheitswerten beruhen.

Im Allgemeinen können beliebige Zustandsmengen  $Z$  und Eingabemengen  $E$  genutzt werden. Um stetige Abbildungen  $f$  und  $g$  behandeln zu können, sollten diese Mengen zumindest mit einer geeigneten Metrik versehen sein, die sie zu metrischen Räumen macht [39].

Für die statische Funktion  $f(z, e)$  in einem zeitdiskreten System können auch statische Fuzzy-Systeme eingesetzt werden. Je nach Auslegung des statischen Fuzzy-Systems erhält man unterschiedliche Klassen von dynamischen Systemen:

- Wird die Fuzzy-Funktion  $f$  aus Fuzzifizierung, Inferenz und Defuzzifizierung gebildet, so erhält man rekurrente Fuzzy-Systeme.

- Setzt die Fuzzy-Funktion eine Regelbasis ohne Fuzzifizierung und Defuzzifizierung um, so erhält man dynamische Fuzzy-Systeme.
- Beschreibt die Fuzzy-Funktion eine Abbildung von Fuzzy-Mengen auf Fuzzy-Mengen mithilfe des Erweiterungsprinzips von Zadeh, so erhält man iterierte Fuzzy-Mengen.
- Verallgemeinert man stochastische Automaten mittels Fuzzy-Logik, so erhält man Fuzzy-Automaten.

In jedem Fall erhält man Fuzzy-Systeme mit inhärenter Dynamik, wie sie im Weiteren beschrieben werden.

### 3 Fuzzy-Systeme mit inhärenter Dynamik

In den letzten Jahren ist eine Reihe von Fuzzy-Systemen mit Dynamik vorgestellt und untersucht worden. Dadurch ist eine Vielzahl von Bezeichnungen entstanden, die nicht immer konsistent sind. Prinzipiell lassen sich diese Fuzzy-Systeme mit Dynamik, wie schon im vorherigen Kapitel angedeutet, in die vier nachfolgend beschriebenen Kategorien einteilen.

#### 3.1 Rekurrente Fuzzy-Systeme

*Rekurrente Fuzzy-Systeme* verwenden als Zustandsgrößen  $z$ , Eingangsgrößen  $e$  und Ausgangsgrößen  $a$  einfache Zahlenwerte  $x$ ,  $u$  und  $y$  oder Vektoren im allgemeinen Fall. Die Transitionsfunktion  $f(x, u)$ , die das dynamische Verhalten beschreibt, ist ein vollständiges Fuzzy-System, das aus den drei Teilen der Fuzzifizierung, Inferenz und Defuzzifizierung besteht.

Die Transitionsfunktion entsteht aus der Auswertung einer Regelbasis. Diese besteht aus einer Ansammlung von „Wenn... dann..“-Regeln, die das Zeitverhalten einer Größe  $x$  sprachlich beschreibt, z. B.: „Wenn die Zustandsgröße  $x(k)$  klein ist und die Eingangsgröße  $u(k)$  normal ist, dann ist die Zustandsgröße  $x(k+1)$  im nächsten Zeitschritt mittel.“ Ein Beispiel für eine solche, tabellarisch dargestellte Regelbasis ist in Tabelle 1 zu sehen. Im allgemeinen Fall kann sie mehrere Eingangsgrößen  $u_p$  und mehrere Zustandsgrößen  $x_i$  beinhalten. Die Auswertung läuft gewöhnlich wie folgt ab:

Die linguistischen Werte „klein“, „mittel“, usw. der Zustandsgröße  $x$  bzw. Eingangsgröße  $u$  werden für die Fuzzifizierung durch Fuzzy-Mengen mit Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_j^x(x)$  bzw.  $\mu_q^u(u)$  modelliert. Die Funktionswerte  $\mu_j^x(x)$  bzw.  $\mu_q^u(u)$  geben den Wahrheitsgrad für den  $j$ -ten linguistischen Wert für  $x$  und den  $q$ -ten linguistischen Wert für  $u$  an. Aus den Wahrheitswerten der linguistischen Größe in der Voraussetzung einer Regel wird in der Inferenz der Wahrheitswert der linguistischen Größe in der Konklusion ermittelt. Die linguistischen Werte von  $x$  in der Konklusion werden mit einem Index  $w$  durchgezählt und jeweils durch ein Singleton an der Stelle  $s_w^x$  modelliert. Das Endergebnis  $f(x, u)$  ergibt sich im Defuzzifizierungsschritt

**Tabelle 1:** Beispiel einer Regelbasis in Matrixform, welche die Veränderung des Zustandswertes  $x(k)$  aufgrund eines Eingangswertes  $u(k)$  auf einen neuen Zustandswert  $x(k+1)$  beschreibt (zum Hintergrund des Beispiels siehe [4]).

		$x(k)$		
		klein	mittel	groß
$u(k)$	gering	klein	klein	klein
	normal	mittel	mittel	klein
	üppig	mittel	groß	klein

nach der Center of Singletons (CoS)-Methode [9; 84] aus der gewichteten Summe der Singletons  $s_w^x$ , wobei die errechneten Wahrheitswerte als Gewichte eingesetzt werden.

Ergänzen sich die Zugehörigkeitsfunktionen in Summe zu eins und wird das Produkt als Und-Operator, die einfache Addition als Oder-Operator<sup>1</sup> und die CoS-Defuzzifizierungsmethode verwendet, so ist die resultierende Gesamtfunktion

$$f(x, u) = \sum_{j,q} s_w^x \mu_j^x(x) \mu_q^u(u).$$

Mit dieser Wahl der Inferenzoperatoren lassen sich rekurrente Fuzzy-Systeme leichter analysieren. Prinzipiell sind auch andere Operatoren einsetzbar [34]. Mit der Transitionsfunktion  $f$  und der Struktur aus Bild 1 ist ein rekurrentes Fuzzy-System festgelegt.

Der obige Ansatz für rekurrente Fuzzy-Systeme [1; 2; 22] entstand unabhängig aus den folgenden zwei unterschiedlichen Motivationen heraus:

- Zum einen lässt sich ein rekurrentes Fuzzy-System als spezielles rekurrentes neuronales Netz interpretieren [22],
- zum anderen kann man es als Verallgemeinerung eines Automaten auffassen [1; 2].

Des Weiteren wurden solche Fuzzy-Systeme unabhängig von [1; 2; 21] auch in [75] zur Navigation eines mobilen Roboters eingeführt. Die beiden obigen Sichtweisen beleuchten verschiedene Aspekte rekurrenter Fuzzy-Systeme, wie nachfolgend erläutert wird.

Die erste Sichtweise [22] beruht auf der Möglichkeit, die oben skizzierte statische Fuzzy-Funktion  $f(x, u)$  durch ein mathematisch äquivalentes neuronales Netz darzustellen. Solche Darstellungen sind als *Neuro-Fuzzy-Systeme* [25; 57] bekannt. Werden statische neuronale Netze mit einer zeitverzögerten Rückführung ihrer Ausgangsgrößen ausgestattet, d.h. in die Struktur aus Bild 1 eingesetzt, so ergeben sich *rekurrente neuronale Netze* [25]. Analog kann man auch Neuro-Fuzzy-Systeme mit einer solchen Rückführung ausstatten. So erhält man rekurrente Neuro-Fuzzy-Systeme [52; 58; 94] oder kurz: rekurrente Fuzzy-Systeme [22].

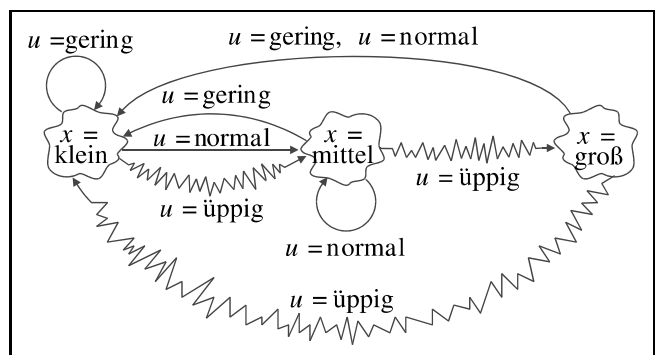
<sup>1</sup> Da sich die Zugehörigkeitswerte zu eins ergänzen, ist die einfache Summe von Wahrheitswerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  identisch mit der begrenzten Summe  $\min\{1, \mu_1 + \mu_2\}$ , und ist somit wie eine S-Norm, also als Fuzzy-Oder-Operator verwendbar.

Durch diese Darstellung ist es möglich, Verfahren und Algorithmen für rekurrente neuronale Netze auf rekurrente Fuzzy-Systeme anzuwenden. Im Speziellen lassen sich Lernverfahren, die die Genauigkeit des Fuzzy-Modells datengetrieben verbessern können [22; 33; 74], auf rekurrente Fuzzy-Systeme übertragen. Die Lernverfahren können vorliegendes Wissen in Form von sprachlichen Regeln nicht direkt nutzen. Allerdings erlaubt sprachlich formuliertes Vorwissen eine gute Initialisierung, welche für den Lernerfolg entscheidend sein kann. Außerdem lassen sich die so optimierten Parameter wieder sprachlich deuten. Somit besteht die Chance, ein plausibles Modell zu erhalten, das die Daten widerspiegelt und Wirkzusammenhänge transparent nachbildet.

Die zweite Sichtweise [1; 2] betrachtet die Regeln eines rekurrenten Fuzzy-Systems als Schaltregeln in einem Automaten, die aber nicht mittels klassischer Logik, sondern mittels Fuzzy-Logik ausgewertet werden. Auf den ersten Blick gleicht eine Regelbasis, wie die aus Tabelle 1, auch einer Schalttabelle. Würde man diese sprachlichen Werte als einzelne diskrete Zustände auffassen und die Regeln durch klassische Logik auswerten, so erhielte man einen endlichen Automaten [4]. Dessen dynamisches Verhalten wiederum ließe sich einfach anhand eines Zustandsgraphen visualisieren.

Es ist für diese Sichtweise wichtig, dass in den Konklusionen nur solche linguistische Werte auftreten, die auch in den Prämissen der Regeln benutzt werden. Erst dann kann man von einer Transition von einem „linguistischen Zustand“ in einen anderen „linguistischen Zustand“ sprechen, wie in Bild 2 angedeutet ist. Die Unschärfe der sprachlichen Zustände wird durch die wolkige Form der Knoten im Zustandsgraph symbolisiert.

Um sicherzustellen, dass gleiche linguistische Werte in den Konklusionen und Prämissen der Regeln auch numerisch die gleiche Bedeutung haben, werden die Singletons  $s_j^x$  zur Beschreibung der sprachlichen Werte in der Konklusion an den Maximalstellen der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_j^x(x)$  der entsprechenden Fuzzy-Menge gewählt, die Teile der Prämissen beschreiben. Durch diese Festlegung der Singletonpositionen ist sichergestellt, dass bei Eingabewerten  $u$ , die an Maximalstellen der Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_q^u(u)$



**Bild 2:** Zustandsgraph für die Regelbasis aus Tabelle 1.

liegen, sich das rekurrente Fuzzy-System für *solche* Zustandswerte exakt wie ein Automat verhält [4]. Das dynamische Verhalten einzelner Punkte kann damit direkt aus dem Zustandsgraphen abgelesen werden.

Mit regelbasierter Fuzzy-Logik können aber alle Zahlenwerte zwischen den Singletonpositionen verarbeitet werden. Dabei werden die Konklusionen je nach ihrer Relevanz gewichtet. Übertragen auf das Automatenbild bedeutet das: Es gelten mehrere, unterschiedlich stark gewichtete Transitionen gleichzeitig. Unter bestimmten Bedingungen verhält sich das rekurrente Fuzzy-System in diesen Fällen auch „automatenähnlich“ [4]. Dies ist für das in Bild 2 gezeigte Beispiel für die nichtgezackten Transitionen der Fall.

Ein Zustandsgraph, der die Transitionen zwischen den linguistischen Zustandswerten visualisiert, liefert also eine vereinfachte Darstellung des dynamischen Verhaltens eines rekurrenten Fuzzy-Systems.

Das dynamische Verhalten rekurrenter Fuzzy-Systeme kann auch gravierend von dem eines endlichen Automaten abweichen. Im Extremfall kann es chaotisches Verhalten aufweisen [4]. Auch in diesem Fall ist der Zustandsgraph nutzbar, und basierend auf ihm können Chaoskriterien ausgewertet werden. So weist die Existenz bestimmter Zyklen auf Chaos hin, welche im Zustandsgraphen durch gezackte Transitionspeile visualisiert werden, wie in Bild 2 zu sehen ist. Weitere Eigenschaften von rekurrenten Fuzzy-Systemen, wie Ruhelagen und deren Stabilität, können zum Teil alleine anhand des Zustandsgraphen abgelesen werden [31].

Der Zustandsgraph ist einfach zu handhaben und sowohl als Analyse- als auch Entwurfsmittel einsetzbar. Dieser einfache Zugang eröffnet ein weites Anwendungsfeld [2; 3; 6; 32]. So werden rekurrente Fuzzy-Systeme z. B. als Mustererkenner industriell in der Stahlindustrie eingesetzt [1; 2; 4; 5; 32; 34]. Das gleiche Verfahren kommt auch bei Brandmeldern [18] zum Einsatz. Ein weiteres Einsatzfeld ist die Modellierung von ökologischen Systemen und Verkehrsströmen [4; 34].

### 3.2 Dynamische Fuzzy-Systeme

In *dynamischen Fuzzy-Systemen*<sup>2</sup> [40; 64–68; 70; 71], wie sie in [65] eingeführt wurden, sind die Zustandsgrößen  $z(k)$  zu jedem Zeitschritt  $k$  keine Zahlenwerte oder Vektoren, sondern Fuzzy-Mengen  $\mu_X$ . Diese sind auf Intervallen definiert<sup>3</sup>. Im Allgemeinen ist der Zustand  $z(k)$  ein Vektor und besteht aus mehreren Zustandsgrößen. Auch die Eingangsgrößen  $e(k)$  sind Fuzzy-Mengen  $\mu_U$ . Die statische Funktion  $f(z, e) = f(\mu_X, \mu_U)$ , die in der dynamischen

<sup>2</sup>Die hier diskutierten dynamischen Fuzzy-Systeme (engl.: dynamic fuzzy systems) unterscheiden sich von den namensgleichen in [43–46; 88] in ihrem Aufbau und werden daher getrennt behandelt.

<sup>3</sup>Eine Fuzzy-Menge  $F$  ist eindeutig durch ihre Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_F(g)$  mit  $g$  auf einer Grundmenge  $G$  festgelegt und durch  $F = \{(g, \mu_F(g)) | g \in G, \mu(g) \in [0, 1]\}$  definiert. Aufgrund der engen Beziehung zwischen der Fuzzy-Menge  $F$  und ihrer Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_F$  wird im Weiteren zwischen diesen beiden nicht mehr unterschieden.

Struktur von Bild 1 eingesetzt wird, bildet also in diesem Fall Fuzzy-Mengen aufeinander ab.

Wie auch bei rekurrenten Fuzzy-Systemen wird aus sprachlichen Regeln ein mathematisches Modell entwickelt. Da ganze Fuzzy-Mengen  $z(k+1) = \mu_Y$  rückgekoppelt werden, ist im Gegensatz zu rekurrenten Fuzzy-Systemen keine Defuzzifizierung und Fuzzifizierung notwendig. Die Funktion  $f(\mu_X, \mu_U)$  ergibt sich also allein aus einem Inferenzschritt.

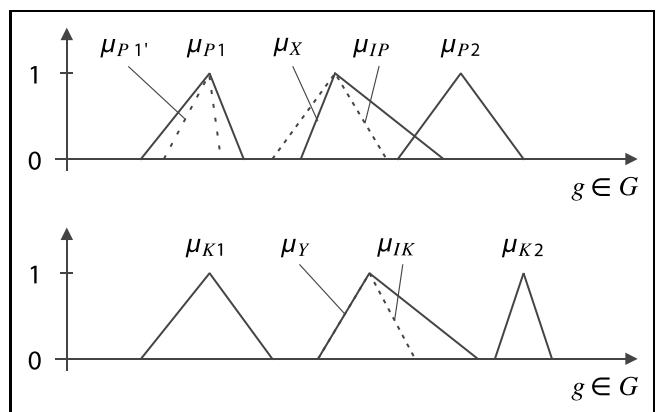
Da ein Inferenzverfahren, das einen Regelsatz repräsentiert, nur solche Fuzzy-Mengen sinnvoll auswerten kann, die linguistisch interpretierbar sind, sollen alle beteiligten Fuzzy-Mengen interpretierbar sein [64; 65; 67]. Die „Interpretierbarkeit“ bedeutet dabei: Die Zugehörigkeitsfunktionen nehmen an je einem eindeutigen Zahlenwert ihr Maximum an. Links und rechts von diesen Zahlenwerten gehen die Zugehörigkeitsfunktionen monoton gegen null. Die Form und Breite der Flanken modelliert die Unschärfe des Zahlenwertes. Im einfachsten Fall sind die Zugehörigkeitsfunktionen dreiecksförmig. Liegt die Form der Flanken fest, so lassen sich solche Fuzzy-Mengen einfach durch ihre Maximalstelle und die beiden Fußpunkte der Flanken parametrisieren (siehe Bild 3).

Durch die Einschränkung auf interpretierbare Fuzzy-Mengen müssen dynamische Fuzzy-Systeme auch nicht als allgemeine dynamische Systeme [39] in abstrakten metrischen Räumen behandelt werden. Des Weiteren sind deshalb statt Fuzzy-Mengen nur ihre Parameter, d. h. Maximalstelle und Fußpunkte, dynamische Größen. Somit kann man dynamische Fuzzy-Systeme durch gewöhnliche, nicht-lineare dynamische Systeme beschreiben.

Das eingesetzte Inferenzverfahren soll dabei im Wesentlichen zwei Bedingungen genügen:

- Interpretierbare Mengen sollen wieder auf interpretierbare Mengen abgebildet werden.
- Die Funktion soll die Regelbasis widerspiegeln.

Diese und weitere Bedingungen sind allerdings bei keinem Standardinferenzverfahren erfüllt. Daher wird ein Inferenz-



**Bild 3:** Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{P1'}$ ,  $\mu_{P1}$ ,  $\mu_X$ ,  $\mu_{IP}$  und  $\mu_{P2}$  vor und Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{K1}$ ,  $\mu_Y$ ,  $\mu_{IK}$  und  $\mu_{K2}$  nach einer geeigneten Abbildung  $f$  in einem einfachen dynamischen Fuzzy-System auf einem Intervall  $G$ .

verfahren mittels „interpolierender Regeln“ verwendet [64]. Dort wird die Funktion  $f(\mu_X, \mu_U)$  bzw. die Abbildung der Parameter der Fuzzy-Menge  $\mu_X$  auf die Parameter der neuen Fuzzy-Menge  $\mu_Y$  in mehreren Schritten bestimmt.

Diese Schritte des Inferenzverfahrens lassen sich anhand zweier gleichzeitig aktiver Regeln veranschaulichen:

- Wenn  $z(k) = P1$ , dann ist  $z(k+1) = K1$ .
- Wenn  $z(k) = P2$ , dann ist  $z(k+1) = K2$ .

Beispiele für diese Fuzzy-Mengen bzw. ihre Zugehörigkeitsfunktionen  $\mu_{P1}$ ,  $\mu_{P2}$ ,  $\mu_{K1}$  und  $\mu_{K2}$  sind in Bild 3 gezeigt.

Die Schritte des Inferenzverfahrens laufen wie folgt ab:

1. Für eine Fuzzy-Menge  $z(k) = \mu_X$  werden benachbarte Fuzzy-Mengen  $\mu_{P1}$  und  $\mu_{P2}$  von linguistischen Werten aus der Regelbasis gesucht. Sie werden so gewichtet, dass durch die Interpolation eine Fuzzy-Menge  $\mu_{IP}$  entsteht, deren Maximalstelle mit der von  $z(k) = \mu_X$  übereinstimmt, wie in Bild 3 beispielhaft gezeigt ist.
2. Die Gewichtungsfaktoren für diese Interpolation werden genutzt, um eine Interpolation der Fuzzy-Mengen  $\mu_{K1}$  und  $\mu_{K2}$  in den Konklusionen der beteiligten Regeln durchzuführen. So erhält man eine interpolierte Konklusion  $\mu_{IK}$ .
3. Durch die interpolierte Prämisse  $\mu_{IP}$  und interpolierte Konklusion  $\mu_{IK}$  ist eine interpolierende Regel

- Wenn  $z(k) = IP$ , dann ist  $z(k+1) = IK$

festgelegt. Aus einer geeigneten Gewichtung der Maximalstellen interpolierender Konklusionen  $\mu_{IK}$  ergibt sich die Maximalstelle der gesuchten Fuzzy-Menge  $f(\mu_X) = \mu_Y$ .

4. Anschließend wird die Unschärfe der Fuzzy-Menge  $z(k) = \mu_X$  mit der Unschärfe der Prämisse  $\mu_{IP}$  der interpolierenden Regel verglichen. Ist die Unschärfe der Fuzzy-Menge  $\mu_X$  größer, so muss die Unschärfe der Konklusion  $\mu_{IK}$  der interpolierenden Regel geeignet erhöht werden. Dies geschieht durch ein analoges Interpolationsverfahren [64; 67]. Im Beispiel aus Bild 3 ist die Fuzzy-Menge  $\mu_X$  nur an der rechten Flanke unschärfer als  $\mu_{IP}$ . Daher wird bei der vorliegenden Regelbasis nur die eine Flanke der Menge  $f(\mu_X) = \mu_Y$  entsprechend unschärfer als die von  $\mu_{IK}$ .

Nach der Ermittlung der interpolierenden Regel und der Modifikation ihrer Konklusion  $\mu_{IK}$  liegt die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_Y = f(z)$  des Bildes von  $z = \mu_X$  vor. Für eine detailliertere Beschreibung und die Behandlung mehrdimensionaler Zustände wird auf [64] verwiesen.

Das Ergebnis eines Inferenzschrittes ist wieder eine interpretierbare Fuzzy-Menge. Die Regelbasis wird sinnvoll umgesetzt, denn: Das Inferenzverfahren gewährleistet, dass sich für  $z = \mu_{P1}$  auch tatsächlich  $f(z) = \mu_{K1}$  als Bild ergibt. Ist die Ausgangssituation genauer bekannt, also ist  $z = \mu_{P1'}$  eine Teilmenge der Fuzzy-Menge  $\mu_{P1}$ , so ergibt

sich auch  $f(\mu_{P1'}) = f(\mu_{P1}) = \mu_{K1}$ , d. h. die Zusatzinformation in der Prämisse wird nicht berücksichtigt, da auch die unscharfe Formulierung der Regel diese Zusatzinformation nicht auflösen kann. Durch den interpolierenden Charakter des Inferenzverfahrens werden im Allgemeinen mehrere Regeln gemäß ihrer Relevanz berücksichtigt.

Im Gegensatz zu rekurrenten Fuzzy-Systemen erhält man eine Aussage über den Informationsgehalt bzw. die Unschärfe des Zustandes. Dafür muss im Gegenzug ein komplexeres Inferenzverfahren genutzt werden.

Für dynamische Fuzzy-Systeme gibt es Methoden, aus Messdaten eines dynamischen Prozesses ein Modell zu erstellen. In [64] wird ein Zweitanksystem modelliert. Den praktischen Einsatz dynamischer Fuzzy-Systeme zeigt auch die Modellierung von Hochtemperatur-Brennstoffzellen [71]. Außerdem lässt sich die Stabilität eines solchen Modells computergestützt untersuchen [64; 66]. Des Weiteren lassen sich Regler für solche Systeme entwerfen, wie anhand eines Rührkesselreaktors und eines Zweitanksystems in [64] demonstriert wird. Weitere Einzelheiten finden sich in [40; 69; 70].

Neben dem oben beschriebenen regelbasierten Inferenzverfahren gibt es noch weitere Möglichkeiten, Abbildungen zwischen Fuzzy-Mengen zu beschreiben und in einem dynamischen System nach Bild 1 einzusetzen. Dies beschreibt nachfolgender Abschnitt.

### 3.3 Iterierte Fuzzy-Mengen

Außer dynamischen Fuzzy-Systemen bilden auch *iterierte Fuzzy-Mengen* [13; 15; 20; 37] und „dynamic fuzzy systems“<sup>4</sup> [43–46; 87–89] Fuzzy-Mengen auf Fuzzy-Mengen ab. Statt des regelbasierten Ansatzes dynamischer Fuzzy-Systeme aus dem vorherigen Kapitel wird in diesen Fällen meistens das Erweiterungsprinzip von Zadeh [93] genutzt.

Bei iterierten Fuzzy-Mengen, eingeführt in [37], wird der Zustand  $z$  aus Gl. (1) durch eine Fuzzy Menge bzw. deren Zugehörigkeitsfunktion im  $\mathbb{R}^n$  charakterisiert. Die Zugehörigkeitsfunktion ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge von null verschieden, oberhalbstetig<sup>5</sup>, normiert und konvex. Einfache Fuzzy-Mengen, die diese Bedingungen erfüllen, haben z. B. dreiecksförmige oder trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen oder sind Singletons. Zugehörigkeitsfunktionen in der Form einer Gauß'schen Glockenkurve, also  $z(x) = e^{-ax^2}$ , sind nicht zulässig, da sie überall von null verschieden sind.

Iterierte Fuzzy-Systeme haben keine Eingangsgrößen  $e$ , sie sind autonom. Die Funktion  $f$ , die nun eine Fuzzy-Menge auf eine neue abbildet, soll stetig sein und sicherstellen,

<sup>4</sup> Um eine Verwechslung mit den dynamischen Fuzzy-Systemen aus dem letzten Abschnitt zu vermeiden, wird für die hier behandelten „dynamic fuzzy systems“ der englische Begriff benutzt.

<sup>5</sup> Dies ist der Fall, wenn die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^n | z(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha$ -Schnitte genannt, für jeden Wert von  $\alpha$  kompakte Mengen, d. h. beschränkte und abgeschlossene Mengen, sind.

dass die sich ergebende Fuzzy-Menge wieder die oben genannten Bedingungen erfüllt. Weitere Bedingungen werden nicht an sie gestellt.

Für die konkrete Konstruktion iterierter Fuzzy-Systeme wird die Funktion  $f$  in der Regel, aber wie oben erwähnt nicht notwendigerweise, mithilfe des Erweiterungsprinzips von Zadeh [10;93] erzeugt. Im einfachsten Fall wird eine klassische Funktion  $\hat{f}$ , die Zahlenwerte  $x$  auf Zahlenwerte  $y$  abbildet, zu einer Fuzzy-Funktion  $f$ , die Fuzzymengen  $\mu_X$  auf Fuzzy-Mengen  $\mu_Y$  abbildet, wie folgt erweitert:

$$\mu_Y(y) = f(\mu_X) = \sup_{y=\hat{f}(x)} \mu_X(x). \tag{3}$$

Für  $y = \hat{f}(x) = 0,5x$  ergibt sich so z. B. aus einer dreiecksförmigen Fuzzy Menge mit Fußpunkten 0,6 und 1 und einem Zentrum bei 0,8 durch die Abbildung  $f$  die dreiecksförmige Fuzzy-Menge mit Fußpunkten bei 0,3 und 0,5 und dem Zentrum bei 0,4. Bild 4 zeigt im oberen Teil diese Abbildung.

Die Abbildung  $\hat{f}$  ist häufig aber selbst unscharf und daher durch eine Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\hat{f}}(x, y)$  gegeben. In einem solchen Fall erhält man  $f$  durch

$$\mu_Y(y) = f(\mu_X) = \sup_x \min \{ \mu_{\hat{f}}(x, y), \mu_X(x) \}. \tag{4}$$

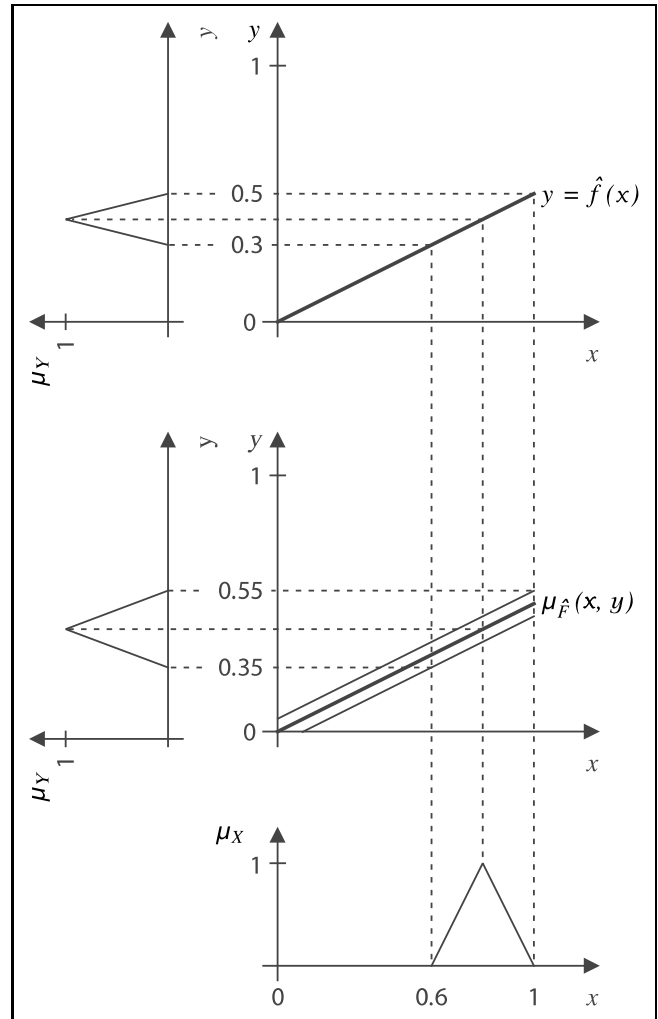
Sei z. B.  $\mu_{\hat{f}}(x, y) = \max\{0, 1 - 20 \cdot |y - 0,5x|\}$ . Diese Zugehörigkeitsfunktion ist eine unscharfe Formulierung der oben betrachteten Funktion  $y = \hat{f}(x) = 0,5x$ , da sie nur für die Wertepaare  $(x, y)$  den Zugehörigkeitswert von 1 annimmt, die  $y = 0,5x$  erfüllen. Ausgehend von der oben beschriebenen dreiecksförmigen Fuzzy-Menge ergibt sich durch die unscharfe Abbildung auch diesmal die dreiecksförmige Fuzzy-Menge mit einem Zentrum bei 0,4. Die Fußpunkte liegen allerdings bei 0,35 und 0,55. Das Ergebnis ist also unschärfer als das Ergebnis der Abbildung  $\hat{f}(x) = 0,5x$ , da die Funktionsbeschreibung  $\mu_{\hat{f}}(x, y)$  selbst unscharf ist. Bild 4 zeigt den Vergleich.

Mit iterierten Fuzzy-Systemen lassen sich Fraktale erzeugen [13;20]. In manchen dieser Systeme kann auch chaotisches Verhalten nachgewiesen werden [12; 15; 37].

Ähnlich aufgebaut wie iterierte Fuzzy-Mengen sind die in [43] eingeführten „dynamic fuzzy systems“ [43;88]. Wieder ist der Zustand eine Fuzzy Menge, die auf einer konvexen, kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , oder allgemeiner eines Banachraums, definiert ist. Die Zugehörigkeitsfunktionen sollen auch die bei den iterierten Fuzzy-Systemen genannten Bedingungen erfüllen.

Bei „dynamic fuzzy systems“ wird die Funktionsvorschrift für  $f$  ausdrücklich durch das Erweiterungsprinzip von Zadeh erzeugt. Kernstück ist wieder eine Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\hat{f}}(x, y)$ . Ausgehend von einem Zustand  $z(k) = \mu_X$  ergibt sich die Zugehörigkeitsfunktion des neuen Zustandes  $z(k+1) = f(z(k)) = \mu_Y$  nach dem Erweiterungsprinzip von Zadeh zu

$$\mu_Y(y) = f(\mu_X) = \sup_x (\mu_{\hat{f}}(x, y) \wedge \mu_X(x)),$$



**Bild 4:** Die Abbildung der Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_X(x)$  auf eine neue Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_Y(y)$  kann mittels (oben) einer klassischen Funktion  $y = \hat{f}(x)$  nach Gl. (3) oder (Mitte) einer unscharfen Funktion  $\mu_{\hat{f}}(x, y)$  nach Gl. (4) durchgeführt werden.

wobei  $\wedge$  ein Fuzzy-Und-Operator ist. Wird für  $\wedge$  der Minimumoperator verwendet, so ergibt sich wieder Gl. (4).

Mit „dynamic fuzzy systems“ werden in [43] Modelle mehrschrittiger Entscheidungsprozesse untersucht. Dabei wird der optimale Stoppzeitpunkt gesucht, bei dem die Summe von unscharfen Belohnungstermen während des Entscheidungsprozesses beim gestoppten System maximiert wird. Das Problem wird mittels dynamischer Programmierung gelöst, zu dessen Zweck das System noch explizit mit einer Ausgabefunktion  $g$  ausgestattet wird, die die Belohnungsterme für die dynamische Programmierung bestimmt. Die Ausgabefunktion  $g$  ist analog zu  $f$  aufgebaut.

Einen theoretischen Rahmen für die dynamischen Fuzzy-Systeme aus Kap. 3.2, iterierte Fuzzy-Mengen und „dynamic fuzzy systems“ bieten *fuzzy-dynamische Systeme* nach [38]. Fuzzy-dynamische Systeme werden im zeitdiskreten Fall durch eine stetige Abbildung von Fuzzy-Mengen auf Fuzzy-Mengen definiert. Dabei wird nicht festgelegt, ob die Funktion aus einem Inferenzverfahren, wie bei dynamischen Fuzzy-Systemen, aus dem Erweite-

rungsprinzip wie bei vielen iterierten Fuzzy-Mengen und den „dynamic fuzzy systems“ oder durch andere Methoden entsteht. Daher beinhalten fuzzy-dynamische Systeme alle diese Ansätze, liefern allerdings in ihrer allgemeinen Formulierung kaum Konkretes.

Des Weiteren schließt der Ansatz der fuzzy-dynamischen Systeme auch zeitkontinuierliche Fuzzy-Systeme mit ein, die eng mit Fuzzy-Differentialgleichungen [16; 29; 30; 83] verwandt sind. Wie diese konkret zu erzeugen und zu interpretieren sind, ist noch nicht endgültig geklärt [83].

### 3.4 Fuzzy Automaten

*Fuzzy-Automaten* [8; 21; 24; 36; 47; 48; 54; 55; 62; 63; 76; 80; 85; 86] wurden in Anlehnung an stochastische Automaten in [85] eingeführt und lassen sich als zeitdiskrete Systeme behandeln. Um ihre Funktionsweise, die dynamischen Größen und die Transitionsfunktion  $f$  möglichst einfach zu erläutern, werden daher im Folgenden zuerst stochastische Automaten betrachtet.

Stochastische Automaten [14] lassen sich formal als Quintupel  $(U, X, Y, r, s)$  beschreiben. Dabei ist

- $U$  eine endliche Menge von Eingabewerten  $u$ ,
- $X$  eine endliche Menge von Zustandswerten  $x$ ,
- $Y$  eine endliche Menge von Ausgabewerten  $y$ ,
- $r : X \times U \times X \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion, deren Funktionswerte  $r(x, u, x')$  die bedingte Wahrscheinlichkeit angeben, mit der der neue Zustandswert  $x' \in X$  angenommen wird unter der Bedingung, dass der aktuelle Zustand  $x \in X$  und die Eingabegröße  $u \in U$  ist und
- $s : X \times U \times Y \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion, deren Funktionswerte  $s(x, u, y)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit angeben, mit der der Ausgabewert  $y \in Y$  angenommen wird unter der Bedingung, dass der aktuelle Zustand  $x \in X$  und die Eingabegröße  $u \in U$  ist.

Ein stochastischer Automat besitzt zu einem Zeitpunkt einen bestimmten Zustandswert  $x$ . In Abhängigkeit des Eingangswertes  $u$  nimmt er dann mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten einen neuen Zustandswert  $x'$  und einen Ausgabewert  $y$  an. Diese Wahrscheinlichkeiten werden durch die Funktionen  $r$  und  $s$  bestimmt. Da ein Zustand jedoch nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angenommen wird, ist der jeweils aktuelle Zustand im Gegensatz zum deterministischen Automaten nicht bekannt. Daher werden bei stochastischen Automaten nicht die Zustände, sondern die Transitionswahrscheinlichkeiten von einem Zustand zum anderen betrachtet.

Zur Visualisierung des Verhaltens eines stochastischen Automaten kann ein Zustandsgraph herangezogen werden. Bild 5 zeigt in der Mitte ein Beispiel. Die gezeichneten Knoten entsprechen den drei Zuständen aus  $X = \{1, 2, 3\}$ . Auf den Transitionspfeilen sind die Transitionswahrscheinlichkeiten  $r(x, u, x')$  vermerkt, die sich für eine bestimmte Eingabe  $u \in U$  ergeben.

Die Transitionswahrscheinlichkeiten  $r(x, u, x')$  lassen sich für jeden einzelnen Wert für  $u$  kompakt in einer Matrix  $T^u = (t_{x',x}^u)$  zusammenfassen<sup>6</sup>. Dies ist in der Mitte in Bild 5 für den gezeigten Zustandsgraphen ausgeführt. Ausgehend von einem bekannten Anfangszustand  $x$  lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Folgezustand direkt aus der entsprechenden Spalte der Matrix  $T^u$  ablesen. Daher ist die Spaltensumme immer gleich eins.

Transitionswahrscheinlichkeiten für mehrere Schritte lassen sich einfach durch die Verkettung der Wahrscheinlichkeiten  $r(x, u, x')$  errechnen [14]. Für aufeinander folgende Eingaben  $u$  und  $u'$  ergibt sich eine Transitionswahrscheinlichkeit  $r(x, (u, u'), x'')$  von  $x$  nach  $x''$ , indem man die Transitionen auf alle möglichen Zwischenzustände  $x'$  und eine anschließende Transition auf den Zustand  $x''$  betrachtet und alle Wahrscheinlichkeiten dieser zusammengesetzten Transitionen addiert, also

$$r(x, (u, u'), x'') = \sum_{x' \in X} r(x, u, x') \cdot r(x', u', x''). \quad (5)$$

Mit der Matrixschreibweise ergibt sich die Matrix  $T^{(u,u')}$  für die Transitionswahrscheinlichkeiten für zwei Zeitschritte durch eine einfache Matrizenmultiplikation der Einzelmatrizen  $T^u$  und  $T^{u'}$ , also  $T^{(u,u')} = T^{u'} \cdot T^u$ .

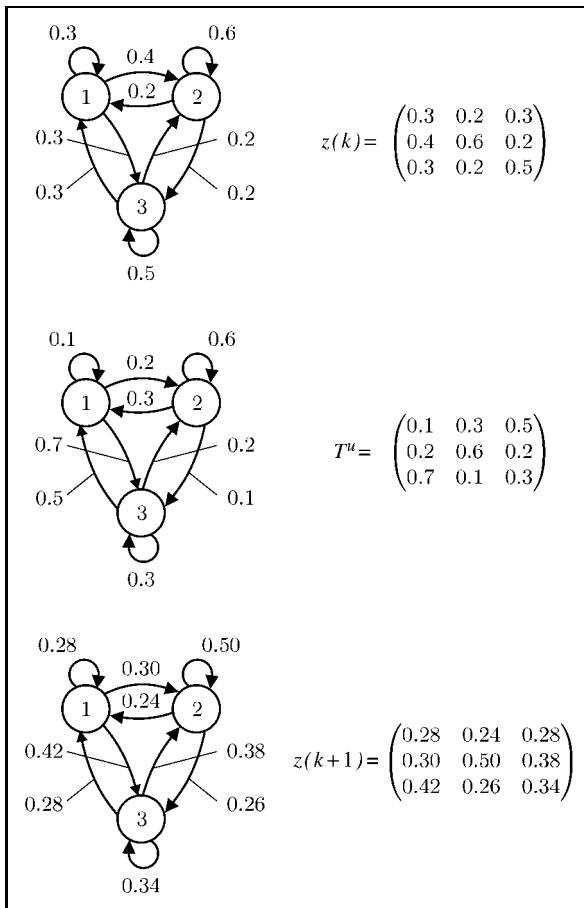
Nach  $k$  Schritten sind die Transitionswahrscheinlichkeiten von einem Anfangszustand  $x$  aus wieder direkt aus der entsprechenden Spalte der zusammengesetzten Matrix abzulesen, die durch  $T^{u(k)} \cdot T^{u(k-1)} \cdot \dots \cdot T^{u(0)}$  gegeben ist. Der stochastische Automat beschreibt keinen deterministischen Wechsel seiner Zustandsgröße  $x$  und ist somit zunächst kein deterministisches zeitdiskretes System. Man kann den stochastischen Automaten allerdings als zeitdiskretes System gemäß Gl. (1) betrachten, wenn man als Zustandsgröße  $z$  die Transitionswahrscheinlichkeiten  $r(x, u, x')$  bzw. die Transitionsmatrizen  $T^u$  verwendet.

Der Zustand  $z$  wird dann durch eine Matrix mit derselben Dimension und Bedeutung wie die Matrizen  $T^u$  dargestellt. Die Transitionswahrscheinlichkeiten  $z(0)$  zum Zeitpunkt  $k = 0$  bilden den Anfangszustand des dynamischen Systems. Wenn noch keine Transitionen stattgefunden haben, ist die Matrix, die den Anfangszustand beschreibt, z. B. die Einheitsmatrix. Bei einem Eingabewert von  $u(0)$  ergeben sich die neuen Transitionswahrscheinlichkeiten  $z(1)$  durch  $z(1) = T^{u(0)} \cdot z(0)$  und spätere Transitionswahrscheinlichkeiten  $z(k+1)$  durch

$$z(k+1) = f(z(k), u(k)) = T^{u(k)} \cdot z(k). \quad (6)$$

Bild 5 zeigt im oberen Teil einen Ausgangszustand  $z(k)$  und die dazugehörigen Transitionswahrscheinlichkeiten in einem Zustandsgraphen. Im mittleren Teil befinden sich die Transitionswahrscheinlichkeiten  $t_{x',x}^u = r(x, u, x')$  für eine

<sup>6</sup> Streng genommen ist zwischen den Zuständen und ihrer Indizierung in der Menge  $X$  zu unterscheiden. Der Einfachheit halber wird das Element  $x$  synonym mit seinem Index verwendet.



**Bild 5:** Zustandsgraph und entsprechende Transitionswahrscheinlichkeiten in Matrixform zur Beschreibung des Zustandes  $z(k)$  eines stochastischen Automaten (oben), der Wirkung einer Eingabe  $u$  (Mitte) und des Folgezustandes  $z(k+1)$  (unten).

bestimmte Eingabe  $u$ . Im unteren Teil zeigt Bild 5 den Folgezustand  $z(k+1)$ , der sich aus  $z(k)$  und der Eingabe  $u$  aus Gl. (6) ergibt.

Die Transitionsfunktion  $f$  ist nach Gl. (6) eine einfache Matrizenmultiplikation. Analog geht man für die Aufstellung der Ausgabefunktion  $g$  vor, die die aktuellen Ausgabewahrscheinlichkeiten bestimmt.

Ein Fuzzy-Automat ist ähnlich aufgebaut wie ein stochastischer Automat. Der Unterschied besteht darin, dass in einem Fuzzy-Automaten die Funktionen  $r$  und  $s$  nicht Wahrscheinlichkeitsverteilungen, sondern Zugehörigkeitsfunktionen sind. Sie beschreiben keine Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Ausgabewahrscheinlichkeiten, sondern vielmehr Übergangsmöglichkeiten bzw. Ausgabemöglichkeiten.

Analog zum stochastischen Automaten lassen sich in einem Fuzzy-Automaten Übergangsmöglichkeiten für mehrere Schritte bestimmen. Diese lassen sich wieder als Matrizen  $T^u$  bzw.  $z(k)$  darstellen. Dabei geben die Elemente  $z_{\hat{x},x}$  der Matrix  $z(k)$  an, mit welchem Grad die Möglichkeit eingeschätzt wird, dass ausgehend von einem Anfangszustand  $x$  der Zustand  $\hat{x}$  nach  $k$  Eingaben angenommen wird. Die dynamische Größe  $z$  in einem Fuzzy-Automaten stellt

also Zugehörigkeitswerte dar, die eine Übergangsmöglichkeit von einem Anfangszustand zu einem Endzustand aufgrund einer Folge von Eingaben beschreibt.

Statt des Produkt- und des Summenoperators in Gl. (5) bzw. der Matrizenmultiplikation in Gl. (6) können in Fuzzy-Automaten verschiedene Fuzzy-Operatoren „ $\circ$ “ eingesetzt werden. Bei der Verwendung des Supremum- und Minimumoperators ergibt sich so z. B.:

$$z_{\tilde{x},x}(k+1) = T^{u(k)} \circ z(k) := \sup_{\hat{x} \in X} \min \left\{ t_{\tilde{x},\hat{x}}^{u(k)}, z_{\hat{x},x}(k) \right\}.$$

Hierbei ist  $\tilde{x}$  der Automatenzustand, der nach  $k+1$  Schritten möglicherweise angenommen wird. Verwendet man als Fuzzy-Operatoren Multiplikation und Addition, so ist die Abbildungsfunktion  $f$  wie im Falle der stochastischen Automaten durch die Gleichung (5) bzw. (6) gegeben. Im Unterschied zu stochastischen Automaten müssen sich die Einträge von  $z(k)$  und  $T_{u(k)}$  nicht zu eins ergänzen, da sie keine bedingten Wahrscheinlichkeiten, sondern bedingte Möglichkeiten beschreiben.

Fuzzy-Automaten enthalten deterministische und nicht-deterministische Automaten als Spezialfälle [86]. Im Umfeld von Fuzzy-Automaten finden sich fuzzy finite state machines [23;42;50;60;81], fuzzy cellular automata [19;56], Fuzzy-Petri-Netze [26;49;51;72;82] und Fuzzy-Markovketten [7;41], die ähnlich aufgebaut sind.

Fuzzy-Automaten werden zur Erkennung von Mustern eingesetzt [76;86]. Im Zusammenhang mit Fuzzy-Sprachen dienen Fuzzy-Automaten z. B. als lexikale Analysatoren [21;53].

#### 4 Vergleich zeitdiskreter Fuzzy-Systeme

In diesem Abschnitt werden die oben vorgestellten zeitdiskreten Fuzzy-Systeme verglichen. Dies soll die Entscheidung für den Einsatz dieser Systeme erleichtern.

Zusätzlich wird das schon erwähnte Verfahren von Takagi, Sugeno und Kang [27;73;77] kurz behandelt. Es gewichtet klassische Differenzgleichungen, indem es Regeln auswertet, wie z. B. die  $i$ -te Regel: „Wenn der Eingangsgrößenvektor  $u(k) \dots$  ist, dann ist  $x(k+1) = f_i(x(k), u(k))$  und  $y(k) = g_i(x(k), u(k))$ .“

Durch die Fuzzifizierung des Eingangsvektors  $u(k)$  wird der Wahrheitswert bestimmt, mit dem die jeweiligen Regeln gelten. Die Wahrheitswerte bestimmen dann die Gewichtungsfaktoren, mit denen die Differenzgleichungen in der Konklusion der einzelnen Regeln gewichtet werden. Das dynamische Verhalten des Systems ist also nicht sprachlich in den Regeln festgelegt. Vielmehr beschreiben die Differenzgleichungen das Verhalten. Die sprachlichen Regeln beschreiben nur, wie stark welche Differenzgleichung Einfluss auf das Gesamtverhalten hat.

Nachfolgend werden einige relevante Eigenschaften der verschiedenen Systeme diskutiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefasst.



**Tabelle 2:** Überblick über die Eigenschaften der verschiedenen zeitdiskreten Fuzzy-Systeme: rekurrente Fuzzy-Systeme (RFS), dynamische Fuzzy-Systeme (DFS), iterierte Fuzzy-Mengen (IFM), Fuzzy-Automaten (FA) und Takagi–Sugeno–Kang Modelle (TSK) mit den Bewertungen 0 für nicht zutreffend, 0,5 für nur bedingt zutreffend und 1 für voll zutreffend.

	RFS	DFS	IFM	FA	TSK
Dynamik sprachlich durch Regelbasis gegeben	1	1	0,5	0,5	0
Zustandswert wird defuzzifiziert zurückgeführt	1	0	0	0	–
Fuzzy-Mengen auf endlichen Grundmengen definiert	0	0	0	1	0
Fuzzy-Mengen auf reellwertigen Grundmengen definiert	1	1	1	0	1
Inferenz mit Standardmethoden	1	0	1	1	1
Einsatz als zeitkontinuierliche Systeme möglich	0,5	0,5	1	0	1

Will man sprachliche Regeln, die einen zeitdiskreten dynamischen Vorgang beschreiben, eins zu eins in ein Fuzzy-Modell umsetzen, so bieten sich rekurrente Fuzzy-Systeme oder dynamische Fuzzy Systeme an. Fuzzy-Automaten und iterierte Fuzzy-Mengen sind nur bedingt dafür geeignet, da sie in erster Linie Funktionen fuzzifizieren und nicht regelbasiert arbeiten. Auch Takagi–Sugeno–Kang Modelle sind hierfür ungeeignet, da sie die Dynamik explizit durch Differenzgleichungen und nicht durch sprachliche Regeln beschreiben.

Will man durch die Modellierung eine gewöhnliche Differenzgleichung erhalten, so muss man einen Ansatz wählen, der eine Defuzzifizierung enthält, also rekurrente Fuzzy-Systeme oder Takagi–Sugeno–Kang Modelle. Alle anderen Ansätze beschreiben den Zustand der dynamischen Systeme durch Fuzzy-Mengen.

Liegt dem Zustandsraum eine endliche Menge  $X$  zu Grunde, so können nur Fuzzy-Automaten eingesetzt werden. Umgekehrt eignen sich Fuzzy-Automaten nicht für den Einsatz bei zeitdiskreten dynamischen Systemen, deren Zustandsraum auf einem reellen Vektorraum  $X$  aufbaut. Alle anderen Ansätze können ohne Einschränkung damit umgehen.

Alle Ansätze, mit Ausnahme der dynamischen Fuzzy-Systeme, nutzen Standardverfahren für die Berechnung des neuen Zustandes.

Manche der Ansätze sind auch für den Einsatz in zeitkontinuierlichen Systemen geeignet. Am einfachsten ist dies bei Takagi–Sugeno–Kang Modellen möglich, da dort die Differenzgleichungen in den Regeln einfach durch Differentialgleichungen ausgetauscht werden können. Iterierte Fuzzy-Mengen sind nach ihrer Definition zeitdiskret. Ihre Verallgemeinerung, die fuzzy-dynamischen Systemen, lassen sich dagegen in ihrer erweiterten Form für die Darstellung von zeitkontinuierlichen Fuzzy-Systemen verwenden. Dies geht aber mit der Nutzung von erheblich komplexeren mathematischen Methoden einher (vgl. [38]) und führt auf Fuzzy-Differentialgleichungen [16; 29; 30; 83]. Für zeitkontinuierliche „dynamic fuzzy systems“ gibt es eigene Ansätze [90; 91]. Rekurrente Fuzzy-Systeme und dynamische Fuzzy-Systeme sind für zeitkontinuierliche Systeme nur bedingt einsetzbar, denn die Regeln der Regelbasis, die sie umsetzen, sind als Transitionen in einem zeitdiskreten System aufzufassen. Prinzipiell sind solche zeitkontinuierlichen rekurrenten Fuzzy-Systeme jedoch realisierbar [4],

erfordern aber eine andere Systemtheorie. Im Bereich der Fuzzy-Automaten würde eine Erweiterung auf zeitkontinuierliche Systeme die zentrale Idee des „fuzzifizierten Automaten“ nicht mehr erlauben.

## 5 Zusammenfassung

Neben statischen Fuzzy-Systemen gibt es eine Reihe von Ansätzen für Fuzzy-Systeme mit Dynamik. Im Bereich der zeitdiskreten Fuzzy-Systeme wurden die wichtigsten vier Kategorien dargestellt. Als regelbasierte Ansätze wurden rekurrente Fuzzy-Systeme und dynamische Fuzzy Systeme betrachtet. Rekurrente Fuzzy-Systeme nutzen ein Fuzzy-System, um den Übergang des defuzzifizierten Zustands auf einen neuen zu beschreiben. Dynamische Fuzzy-Systeme beschreiben den Zustand durch eine interpretierbare Fuzzy-Menge und nutzen einen eigenen Inferenzmechanismus, um den neuen Zustand zu berechnen. Die anderen Ansätze basieren auf dem Erweiterungsprinzip von Zadeh: Iterierte Fuzzy-Mengen und deren verwandte Ansätze beschreiben die Dynamik von Fuzzy-Mengen, die auf Intervallen definiert sind, während Fuzzy-Automaten Fuzzy-Mengen verwenden, die auf endlichen Grundmengen definiert sind.

## Literatur

- [1] J. Adamy, Breakout Prediction for Continuous Casting by Fuzzy Mealy Automata, Proc. of EUFIT'95, Aachen (1995) 754–759.
- [2] J. Adamy, Device for early detection of runout in continuous casting, EP Priority Date 03.04.1995, European Patent EP 0819033 B1 (1998), US Patent 5,904,202 (1999).
- [3] J. Adamy, J. Freitag, S. Lorenz, Process for parametering a fuzzy automaton that compares a measurement system to a pattern signal, European Patent EP 0941504 B1 (2001), US Patent 6,345,206 B1 (2002).
- [4] J. Adamy, R. Kempf, Regularity and chaos in recurrent fuzzy systems, Fuzzy Sets and Systems 140 (2) (2003) 259–284.
- [5] J. Adamy, W. Tautz, M. Niemann, H.-J. Nitsche, J. Göpel, Automatisierungsverfahren mit Fuzzy-Systemen und neuronalen Netzen für Stranggießanlagen und Stahlbehandlungslinien, GMA-Tagung „Computational Intelligence“, Berlin, VDI-Report 1381 (1998) 69–86.
- [6] J. Adamy, A. Yousif, Controller with dynamic discrete-time fuzzy-systems, German Patent DE19734711C1 (1999), European Patent EP1002260B1 (2002).
- [7] K.E. Avrachenkov, E. Sanchez, Fuzzy Markov Chains and Decision-Making, Fuzzy Optimization and Decision Making 1 (2) (2002) 143–159.

- [8] R. Belohlavek, Determinism and fuzzy automata, *Information Sciences* 143 (4) (2002) 205–209.
- [9] T. Bertram, F. Svaricek, T. Bindel, R. Böhm, H. Kiendl, B.-M. Pfeiffer, M. Weber, Fuzzy Control, Zusammenstellung und Beschreibung wichtiger Begriffe, at 42 (7) (1994) 322–326.
- [10] G. Böhme, *Fuzzy-Logik*, Springer, Berlin, 1993.
- [11] T. Booth, *Sequential Machines and Automata Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [12] R. Bassanezi, L. Barros, P. Tonelli, Attractors and asymptotic stability for fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets and Systems* 113 (3) (2000) 473–483.
- [13] C.A. Cabrelli, B. Forte, U. Molter, E. Vrscay, Iterated Fuzzy Sets Systems: A New Approach to the Inverse Problem for Fractals and Other Sets, *J. Math. Anal. Applications* 171 (1) (1992) 79–100.
- [14] V. Claus, *Stochastische Automaten*, Teubner, Stuttgart, 1971.
- [15] P. Diamond, Chaos in Iterated Fuzzy Systems, *J. Math. Anal. Applications* 184 (3) (1994) 472–484.
- [16] D. Dubois, H. Prade, Towards fuzzy differential calculus, *Fuzzy Sets and Systems* 8 (1) (1982) 1–17, 8 (2) (1982) 105–116 und 8 (3) (1982) 225–233.
- [17] H. Ehrig, *Universal Theory of Automata*, Teubner, Stuttgart, 1974.
- [18] R. Engel, K. Henning, Sichere Brand- und Gefahrenmeldung mit Mehrfachsensor und Fuzzy-Logik, *atp* 41 (4) (1999) 39–43.
- [19] P. Flocchini, F. Geurts, A. Mingarelli, N. Santoro, Convergence and aperiodicity in fuzzy cellular automata: revisiting rule 90, *Physica D* 142 (1) (2000) 20–28.
- [20] B. Forte, M. Lo Schiavo, E.R. Vrscay, Continuity properties of attractors for treated fuzzy set systems, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 36 (1994) 175–193.
- [21] J.R. Garitagoitia, J.R.G. Gonzalez de Mendivil, J. Echanobe, J.J. Astrain, F. Farina, Deformed Fuzzy Automata for Correcting Imperfect Strings of Fuzzy Symbols, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* 11 (3) (2003) 299–310.
- [22] V. Gorrini, H. Bersini, Recurrent fuzzy systems, *Proc. 3rd IEEE Conf. on Fuzzy Systems*, Orlando (1994) 193–198.
- [23] J. Grantner, M.J. Patyra, Synthesis and Analysis of Fuzzy Logic Finite State Machine Models, *Proc. 3rd IEEE Conf. on Fuzzy Systems*, Orlando (1994) 205–210.
- [24] M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines (editors), *Fuzzy Automata and Decision Processes*, North-Holland, New York, 1977.
- [25] S. Haykin, *Neural networks: a comprehensive foundation*, Prentice-Hall, London, 1999.
- [26] M. Hanna, A. Buck, R. Smith, Fuzzy Petri Nets with Neural Networks to Model Products Quality from a CNC-Milling Machining Centre, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics A* 26 (5) (1996) 638–645.
- [27] Y. Jin, *Advanced Fuzzy Systems Design and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [28] J. Kahlert, H. Frank, *Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control*, Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [29] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 24 (3) (1987) 301–318.
- [30] A. Kandel, W. Byatt, Fuzzy processes, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (2) (1980) 117–152.
- [31] R. Kempf, J. Adamy, Equilibria of recurrent fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 140 (2) (2003) 231–257.
- [32] R. Kempf, J. Adamy, Sequential pattern recognition employing recurrent fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (3) 451–472.
- [33] R. Kempf, H. Staab, Funktionswurzeln und Lernalgorithmen für abgetastete Systeme, *Proc. 12. Workshop Fuzzy-Systeme*, Dortmund (2002) 90–99.
- [34] R. Kempf, *Rekurrente Fuzzy-Systeme*, Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1028, VDI Verlag GmbH, 2004.
- [35] H. Kiendl, *Fuzzy Control methodenorientiert*, Oldenbourg, München, 1997.
- [36] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, Prentice Hall, London, 1995.
- [37] P.E. Kloeden, Chaotic iterations of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 42 (1) (1991) 37–42.
- [38] P.E. Kloeden, Fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets and Systems* 7 (3) (1982) 275–296.
- [39] W. Krabs, *Dynamische Systeme: Steuerbarkeit und chaotisches Verhalten*, Teubner, Stuttgart, 1998.
- [40] V. Krebs, E. Schäfers, *Dynamische Fuzzy Systeme zur qualitativen Prozeßmodellierung*, GMA-Tagung ‚Computational Intelligence‘, Berlin, VDI-Report 1381 (1998) 115–135.
- [41] R. Kruse, R. Buck-Emden, R. Cordes, Processor power considerations – An application of fuzzy Markov chains, *Fuzzy Sets and Systems* 21 (1987) 289–299.
- [42] H. Kumbhojkar, S. Chaudhari, On covering of products of fuzzy finite state machines, *Fuzzy Sets and Systems* 125 (2) (2002) 215–222.
- [43] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, A limit theorem in some dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 51 (1) (1992) 83–88.
- [44] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, The Time Average Reward for Some Dynamic Fuzzy Systems, *Computers and Mathematics with Applications* 37 (1999) 77–86.
- [45] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, A fuzzy relational equation in dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 101 (3) (1999) 439–443.
- [46] M. Kurano, M. Yasuda, J. Nakagami, Y. Yoshida, An approach to stopping problems of a dynamic fuzzy system, *Fuzzy Sets and Systems* 131 (2) (2002) 225–233.
- [47] E.T. Lee, Fuzzy Tree Automata and Syntactic Pattern Recognition, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 4 (4) (1982) 445–449.
- [48] H.-S. Lee, Minimizing fuzzy finite automata, *Proc. 9th IEEE Internat. Conf. on Fuzzy Systems*, San Antonio (2000) 65–70.
- [49] C. Looney, Fuzzy Petri Nets for Rule-Based Decisionmaking, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 18 (1) (1988) 178–183.
- [50] D. Malik, J. Mordeson, M. Sen, Products of fuzzy finite state machines, *Fuzzy Sets and Systems* 92 (1) (1997) 95–102.
- [51] D. Malik, J. Mordeson, *Fuzzy Discrete Structures*, Physica Verlag, Heidelberg, 2001.
- [52] P. Mastorocostas, I. Theocharis, A Recurrent Fuzzy-Neural Model for Dynamic System Identification, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics B* 32 (2) (2002) 176–190.
- [53] A. Mateescu, A. Salomaa, K. Salomaa, S. Yu, Lexical Analysis with a Simple Finite-Fuzzy-Automaton Model, *Journal of Universal Computing* 1 (5) (1995) 292–311.
- [54] J. Mordeson, D. Malik, *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Application*, Chapman and Hall, London, 2002.
- [55] J. Mordeson, P. Nair, Successor and Source of (Fuzzy) Finite State Machines and (Fuzzy) Directed Graphs, *Information Sciences* 95 (1–2) (1996) 113–124.
- [56] M. Mraz, N. Zimic, I. Lapanja, I. Bajec, Fuzzy Cellular Automata: From Theory to Applications, 12th IEEE Internat. Conf. on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI’00), Vancouver, Canada (2000) 320–323.
- [57] D. Nauck, F. Klawonn, R. Kruse, *Neuronale Netze und Fuzzy-Systeme*, Vieweg, Braunschweig, 1996.

- [58] A. Nürnberger, R. Kruse, A Neuro-Fuzzy Approach to Optimize Hierarchical Recurrent Fuzzy Systems, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1 (2) (2002) 221–248.
- [59] O. Nelles, LOLIMOT – Lokale, lineare Modelle zur Identifikation nichtlinearer, dynamischer Systeme, at 45 (4) (1997) 163–174.
- [60] C. Omlin, K. Thornber, C. Giles, Fuzzy Finite-State Automata Can Be Deterministically Encoded into Recurrent Neural Networks, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* 6 (1) (1998) 76–89.
- [61] B.-M. Pfeiffer, J. Jäkel, A. Kroll, C. Kuhn, H.-B. Kuntze, U. Lehmann, T. Slavinski, V. Tews, Erfolgreiche Anwendungen von Fuzzy Logik und Fuzzy Control, at 50 (10) (2002) 461–471 und (11) (2002) 511–521.
- [62] E. Santos, W. Wee, General Formulation of Sequential Machines, *Information and Control*, 12 (1) (1968) 5–10.
- [63] E. Santos, Fuzzy Automata and Languages, *Information Sciences* 10 (3) (1976) 193–197.
- [64] E. Schäfers, Dynamische Fuzzy-Systeme zur qualitativen Prozeßmodellierung: Eine neue Systemtheorie, Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 745, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 1999.
- [65] E. Schäfers, Inferenz mittels interpolierender Regeln – ein neues Verfahren zur Beschreibung von Fuzzy-Systemen, 5. Workshop ‚Fuzzy Control‘, Dortmund (1995) 14–27.
- [66] E. Schäfers, Stability Analysis of Dynamic Fuzzy Systems, Proc. of EUFIT’99, Aachen (1999), (auf CD-ROM).
- [67] E. Schäfers, V. Krebs, Dynamic Fuzzy Systems for Qualitative Process Modeling: Principles of a New System Theory, at 47 (8) (1999) 382–389.
- [68] E. Schäfers, V. Krebs, Stability analysis and controller design for dynamic fuzzy systems based on a new fuzzy inference approach, Proc. 6th IEEE Internat. Conf. on Fuzzy Systems, Barcelona (1997) 1033–1038.
- [69] K. Schmid, Qualitative dynamische Modelle für das Verhalten von Hochtemperatur-Brennstoffzellen, Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 1013, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2003.
- [70] K. Schmid, V. Krebs, Berücksichtigung von Vorwissen bei der Modellierung mit dynamischen Fuzzy-Systemen, 9. Workshop Fuzzy-Systeme, Dortmund (1999) 226–239.
- [71] K. Schmid, V. Krebs, E. Ivers-Tiffée, Qualitative dynamische Modelle für die Werkstoffentwicklung von Hochtemperatur-Brennstoffzellen, atp 44 (7) (2002) 55–60.
- [72] V. Shen, Reinforcement Learning for High-Level Fuzzy Petri Nets, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics B* 33 (2) (2003) 351–362.
- [73] M. Sugeno, K. Kang, Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator, *Fuzzy Sets and Systems* 18 (3) (1986) 329–346.
- [74] H. Surmann, M. Maniadakis, Learning feed-forward and recurrent fuzzy systems: A genetic approach, *Journal of Systems Architecture* 47 (7) (2001) 649–662.
- [75] H. Surmann, J. Huser, L. Peters, A Fuzzy System for Indoor Mobile Robot Navigation, Proc. 4th IEEE Internat. Conf. on Fuzzy Systems, Yokohama (1995) 83–88.
- [76] F. Steimann, K.-P. Adlassnig, Clinical Monitoring with Fuzzy Automata, *Fuzzy Sets and Systems* 61 (1) (1994) 37–42.
- [77] H. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and Its Application to Modeling and Control, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* 15 (1) (1985) 116–132.
- [78] T. Terano, K. Asai, M. Sugeno, Fuzzy systems theory and its applications, Academic Press, San Diego, 1992.
- [79] T. Terano, K. Asai, M. Sugeno, Applied fuzzy systems, Academic Press, London, 1994.
- [80] M. Thomason, Finite Fuzzy Automata, Regular Fuzzy Languages, and Pattern Recognition, *Pattern Recognition* 5 (1973) 383–390.
- [81] F. Unal, E. Khan, A Fuzzy Finite State Machine Implementation Based on a Neural Fuzzy System, Proc. 3rd Conf. on Fuzzy Systems, Orlando (1994) 1749–1754.
- [82] M. Urban, Fuzzy-Konzepte für Just in Time-Produktion und -Beschaffung, Peter Lang, Frankfurt, 1998.
- [83] D. Vorobiev, S. Seikkala, Towards the theory of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems* 125 (2) (2002) 231–237.
- [84] Fuzzy logic and fuzzy control – Terms and definitions, VDI/VDE-Richtlinien, VDI/VDE 3550 Blatt 2, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2000.
- [85] W.G. Wee, On Generalizations of Adaptive Algorithms and Application of the Fuzzy Set Concept to Pattern Classification, Dissertation, Purdue Universität, 1967.
- [86] W.G. Wee, K.S. Fu, A Formulation of Fuzzy Automata and its Application as a Model of Learning Systems, *IEEE Trans. on System Science and Cybernetics* 5 (3) (1969) 215–223.
- [87] Y. Yoshida, Duality in dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 95 (1) (1998) 53–65.
- [88] Y. Yoshida, Cyclic classes and an ergodic theorem in dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 95 (2) (1998) 189–199.
- [89] Y. Yoshida, The recurrence of dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 95 (3) (1998) 319–332.
- [90] Y. Yoshida, A continuous-time dynamic fuzzy system (I), (II), *Fuzzy Sets and Systems* 113 (3) (2000) 453–460, 461–472.
- [91] Y. Yoshida, Fuzzy stopping in continuous-time dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 132 (3) (2002) 291–301.
- [92] L. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control* 8 (3) (1965), 338–353.
- [93] L. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III, *Information Science* 8 (3) (1975), 199–251, 8 (4) (1975), 301–357 and 9 (1) (1976) 43–80.
- [94] J. Zhang, A. Morris, Recurrent Neuro-Fuzzy Networks for Nonlinear Process Modeling, *IEEE Trans. on Neural Networks* 10 (2) (1999) 313–326.

Manuskripteingang: 15. März 2004.



**Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy** ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, Computational Intelligence, Bionik und mobile Robotik.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, 64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151-16-2507, E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de



**Dr. rer. nat. Roland Kempf, MA** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Rekurrente Fuzzy-Systeme, nichtlineare Systeme.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik, 64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151-16-2507, E-Mail: info@r-kempf.de