

# Vereinfachte schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen

Simplified Fast Control of Linear Systems with Input Constraints

Boris Jasiewicz, Jürgen Adamy, Dilyana Domont-Yankulova, Technische Universität Darmstadt

**Zusammenfassung** Sättigende, weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Lyapunov-Funktionen eignen sich zur schnellen Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen. Der vorliegende Beitrag stellt eine Vereinfachung dieses Regelungstyps bei gleichzeitiger Verbesserung des Regelverhaltens vor. Die Vereinfachung führt auf weniger restriktive Stabilitätsbedingungen. Hierdurch vergrößert sich die Menge regelbarer Strecken, und die Anwendung dieses Regelungstyps auf bestimmte instabile Strecken ist erstmals möglich. Des Weiteren wird ein LMI-basiertes Verfahren zur effizienten Bestimmung von Reglerparametern vorgestellt. Damit werden Entwürfe von schnellen Regelungen für zwei Benchmarkstrecken vorgenommen. Eine Nachoptimierung der

Reglerparameter mittels Suchverfahren führt zu fast zeitoptimalem Verhalten. ►► **Summary** Saturating, soft variable-structure controls using implicit Lyapunov functions are suited for fast control of linear systems subject to input constraints. We present a simplified version of this type of control. It shows an improved performance mainly due to less restrictive stability constraints. The set of controllable plants is enlarged so this type of control can be applied to certain unstable systems for the first time. A design procedure using LMIs is presented to calculate the parameters of the controller. This procedure is used to design fast controls for two benchmark problems. Further optimisation using local nonconvex optimisation leads to nearly time-optimal results.

**Schlagwörter** Weiche strukturvariable Regelung, fast zeitoptimale Regelung, implizite Lyapunov-Funktion ►►

**Keywords** Soft variable-structure control, nearly time-optimal control, implicit Lyapunov function

## 1 Einleitung

Bei allen realen Regelsystemen treten Stellgrößenbeschränkungen auf. Aus diesem Grund gibt es mittlerweile eine große Anzahl von verschiedenen Konzepten, die einen theoretisch fundierten Umgang mit diesem Phänomen ermöglichen, siehe z. B. den Überblicksartikel [6] und die Aufsatzsammlungen [15; 21; 22].

Eine besondere Problemklasse stellt die schnelle Regelung von linearen Strecken dar. Schnelle Ausregelvorgänge erfordern im Allgemeinen den Betrieb der Stellgröße im sättigenden Bereich [3]. Viele Arbeiten schlagen deshalb lineare Regelgesetze vor, die den über den zulässigen Bereich hinausgehenden Anteil der Stell-

größe einfach abschneiden, wie z. B. [10–12]. Andere Ansätze verwenden parameterabhängige Regelgesetze, die während des Ausregelvorgangs so angepasst werden, dass der zur Verfügung stehende Stellgrößenbereich möglichst gut genutzt wird, siehe z. B. [8; 9; 13; 19].

Auch die weichen strukturvariablen Regelungen mittels impliziter Lyapunov-Funktionen [1; 4] nutzen parameterabhängige Regelgesetze. Während die ursprünglichen Arbeiten [1; 16] die Stellgröße zwar möglichst nah an der Begrenzung betreiben, vermeiden sie jedoch Sättigung bewusst. Ein noch schnelleres Ausregelverhalten ist mit der in [17] vorgestellten Kombination von sättigender und weicher strukturvariabler Regelung

mittels impliziter Lyapunov-Funktionen möglich. An diesem Punkt setzt der vorliegende Artikel an. Es wird eine Vereinfachung der Struktur der auf dieser Kombination beruhenden Regelung vorgeschlagen, die deren Anwendungsbreite vergrößert.

In Abschnitt 2 wird die vereinfachte Regelung definiert und ein Stabilitätssatz angegeben und bewiesen. Die vereinfachte Struktur führt auf veränderte Stabilitätsbedingungen, die weniger restriktiv sind als die der Vorgängerversionen. Damit vergrößert sich die Menge regelbarer Strecken und die Anwendung dieses Regelungstyps auf instabile Strecken, deren Eigenwertschwerpunkt in der rechten komplexen Halbebene liegt, ist erstmals möglich, siehe Abschnitt 2.3.

In Abschnitt 3 werden die Bedingungen in lineare Matrixungleichungen (LMI) umgewandelt und zur Bestimmung der Reglerparameter ein effizientes Entwurfsverfahren basierend auf einem konvexen Gütemaß vorgeschlagen. Damit erfolgt in Abschnitt 4 der Entwurf einer U-Boot-Regelung und einer Regelung für eine instabile Strecke, deren Eigenwertschwerpunkt in der rechten komplexen Halbebene liegt. Um das Potenzial der Regelung zu demonstrieren, werden die Reglerparameter auch durch Lösung eines nicht-konvexen Optimierungsproblems bestimmt, woraus für beide Benchmarkstrecken annähernd zeitoptimale Ausregelverläufe resultieren.

Im Weiteren sei das Modell der Strecke in Regelungsnormalform gegeben und laute

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \tag{1}$$

wobei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathbb{R}$ , mit

$$|u| \leq u_{\max}, \tag{2}$$

das heißt, die Stellgröße des Systems ist auf  $\pm u_{\max}$  begrenzt. Die Aufgabe der Regelung ist es, den Zustandsvektor aus einem Anfangsgebiet

$$\mathbf{x}(t=0) \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n \tag{3}$$

in minimaler Zeit in die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  zu überführen.

**Notation.** Der symmetrische Sättigungsoperator ist durch  $\text{sat}(\cdot) = \text{sign}(\cdot) \cdot \min(|\cdot|, u_{\max})$  definiert. Die Notation  $\mathbf{A} < \mathbf{B}$  bedeutet, dass die Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  negativ definit ist.

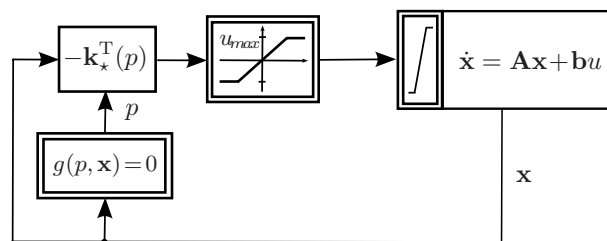
## 2 Einfache implizite Regelung

Das Grundprinzip der Regelung besteht darin, eine parameterabhängige Zustandsrückführung so zu verändern, dass der zur Verfügung stehende Stellgrößenbereich möglichst gut ausgenutzt wird. Ein Blockschaltbild der Regelung zeigt Bild 1.

### 2.1 Regelgesetz

Das Regelgesetz der vereinfachten sättigenden impliziten Regelung lautet

$$u = -\text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}), \tag{4}$$



**Bild 1** Blockschaltbild der sättigenden impliziten Regelung. Der Parameter  $p$  des Rückführvektors  $\mathbf{k}_*(p)$  wird aus dem aktuellen Zustand durch Lösung der impliziten Gleichung  $g(p, \mathbf{x}) = 0$  bestimmt.

wobei  $p \in (0, 1]$  der während des Ausregelverlaufs zu bestimmende Selektionsparameter ist. Mit seiner Hilfe wird die Zustandsrückführung

$$\mathbf{k}_*(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}}_* - \mathbf{a} \tag{5}$$

berechnet. Dabei enthält der Vektor  $\mathbf{a}^T = [a_0, \dots, a_{n-1}]$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Strecke und der Vektor  $\hat{\mathbf{a}}_*^T = [\hat{a}_{*,0}, \dots, \hat{a}_{*,n-1}]$  die Koeffizienten des festzulegenden charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises bei  $p = 1$  im ungesättigten Fall, d. h. wenn  $|\mathbf{k}_*^T(p)\mathbf{x}| \leq u_{\max}$  gilt, und somit der korrespondierende lineare Regelkreis mit  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_*^T(1))\mathbf{x}$  beschrieben ist.<sup>1</sup> Weiterhin ist die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^n, \dots, p^2, p) \tag{6}$$

gegeben.

Der Selektionsparameter ist implizit definiert über das Auswahlgesetz

$$g(p, \mathbf{x}) = 0 \tag{7}$$

mit

$$g(p, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1 \text{ und} \tag{8}$$

$$\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(p), \tag{9}$$

wobei die Matrix  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiv definit sei. Auf diese Weise beschreibt die Menge

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(p, \mathbf{x}) < 0\} \tag{10}$$

für alle  $p \in (0, 1]$  ellipsoide Bereiche im Zustandsraum.

### 2.2 Stabilitätsnachweis

Der Stabilitätsnachweis für den geschlossenen Regelkreis mit der sättigenden Zustandsrückführung (4) erfolgt wie in [17] unter Zuhilfenahme einer nichtsättigenden<sup>2</sup> Zustandsrückführung ähnlicher Struktur:

$$u = -\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x} \text{ mit} \tag{11}$$

$$\mathbf{k}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}. \tag{12}$$

<sup>1</sup> Der korrespondierende lineare Regelkreis ist nur künstlich. Da das Regelgesetz in Sättigung gehen kann – und dies sogar ausdrücklich erwünscht ist –, ist es wahrscheinlich, dass für viele  $\mathbf{x}$  aus der Menge  $\{\mathbf{x} : g(1, \mathbf{x}) = 0\}$  gilt, dass  $|\mathbf{k}_*^T(1)\mathbf{x}| > u_{\max}$ .

<sup>2</sup> Dies bedeutet, dass das Regelgesetz die Stellgrößenbeschränkung überall innerhalb des korrespondierenden Ellipsoids  $\mathcal{G}(p)$  einhält.

Ähnlich wie im Falle des sättigenden Regelgesetzes besteht der Vektor  $\hat{\mathbf{a}}^T = [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1}]$  aus den Koeffizienten des festzulegenden charakteristischen Polynoms des korrespondierenden linearen Regelkreises bei  $p = 1$ , d. h.  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(1))\mathbf{x}$ .

Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Abkürzungen

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T, \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_*(p) = \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{D}^{-1}(p)\hat{\mathbf{a}}_* - \mathbf{a})^T \quad (14)$$

verwendet. Da gemäß Voraussetzung die Strecken in Regelungsnormalform vorliegen, ist auch die kompakte Schreibweise

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}^{-1}(p), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(1), \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_*(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_{*,1}\mathbf{D}^{-1}(p), \quad \hat{\mathbf{A}}_{*,1} = \hat{\mathbf{A}}_*(1), \quad (16)$$

möglich.

Für die vereinfachte implizite Regelung gilt

**Satz 1 (Stabilität).** *Wenn die Ungleichungen*

$$\mathbf{R}_1 > \mathbf{0}, \quad (17a)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N} < \mathbf{0}, \quad (17b)$$

$$\forall p \in (0, 1] : \begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \hat{\mathbf{a}}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{D}(p) \\ \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{D}(p)\mathbf{a} & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (17c)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 < \mathbf{0}, \quad (17d)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} < \mathbf{0}, \quad (17e)$$

mit  $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -1)$ , erfüllt sind, dann

- hat die Selektionsstrategie (7) eine eindeutige Lösung auf dem Intervall  $(0, 1]$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und ist stetig erweiterbar in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
- hält das nichtsättigende Regelgesetz (11) für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  die Stellgrößenbeschränkung ein,
- ist  $p(\mathbf{x})$  eine durch Gl. (7) auf  $\mathcal{G}(1)$  definierte implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des geschlossenen Regelkreises mit dem nichtsättigenden Regelgesetz (11) und
- eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage des geschlossenen Regelkreises mit dem sättigenden Regelgesetz (4).

*Beweis.* Die beiden nachfolgend verwendeten Sätze 4 und 5 sind im Anhang zitiert. Es wird zunächst (a) gezeigt, das heißt, dass die Bedingungen (i) bis (iii) aus Satz 4 erfüllt sind und die Gl. (7) implizit die Funktion  $p(\mathbf{x})$  definiert. Im nächsten Schritt erfolgt der Nachweis von (b). Dann wird (c) gezeigt: Die Bedingung (iv) aus Satz 4 ist erfüllt und somit  $p$  eine Lyapunov-Funktion für den nichtsättigenden Regelkreis mit Regelgesetz (11). Und schließlich erfolgt der Nachweis von (d) mit Hilfe von Satz 5.

zu (a) Wir beginnen mit Bedingung (ii). Für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x} \\ & \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p)) \\ & = \underbrace{\lambda_{\min}(\mathbf{R}_1)}_{>0} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \underbrace{\lim_{p \rightarrow 0^+} p^{-2}}_{=\infty}, \end{aligned}$$

und somit für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) = \infty > 0.$$

Für die obere Grenze folgt aus der Definition (10) für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} g(p, \mathbf{x}) = g(1, \mathbf{x}) < 0.$$

Damit ist gezeigt, dass Bedingung (ii) erfüllt ist.

Für Bedingung (iii) berechnen wir die partielle Ableitung

$$\frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} = \frac{1}{p} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) (\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x}. \quad (18)$$

Sie ist endlich für alle  $(p, \mathbf{x}) \in (0, 1] \times \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$  und nur dann negativ, wenn die Matrix  $\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N}$  negativ definit ist. Dies stellt Gl. (17b) sicher, und Bedingung (iii) ist erfüllt.

Zur Überprüfung von Bedingung (i) zeigen wir zunächst, dass der Grenzwert des maximalen Eigenwertes von  $\mathbf{R}(p)$ , mit  $g(p, \mathbf{x}) = 0$ , an der Stelle  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  gegen unendlich strebt. Es gilt die obere Abschätzung [5]

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x}$$

und mit Gl. (7) bzw.  $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} = 1$  folgt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x})))}.$$

Daher muss für den Grenzwert  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  gelten

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x})))} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x}))) = \infty. \quad (19)$$

Nun zeigen wir, dass  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))$  nur für den Grenzwert  $p \rightarrow 0^+$  gegen unendlich strebt. Aus den Gln. (9) und (17a) folgt, dass

$$\text{für alle } p \in (0, 1] : 0 < \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) < \infty \quad (20)$$

gilt. Weiterhin kann  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))$  von unten mit

$$\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p))$$

abgeschätzt werden [5]. Mit  $\lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p)) = p^{-2}$  für  $p \in (0, 1]$  berechnet sich der Grenzwert zu

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \lim_{p \rightarrow 0^+} p^{-2} = \infty. \quad (21)$$

Aus den Gln. (20) und (21) folgt, dass  $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \rightarrow \infty$  nur dann wenn  $p \rightarrow 0^+$ . Daraus und mit Gl. (19) folgt wiederum, dass für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  aus  $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} = 1$  der Grenzübergang  $p \rightarrow 0^+$  resultiert. Dies ist Bedingung (i) aus Satz 4.

Die Bedingungen (i) bis (iii) sind demnach erfüllt und die Funktion  $p(\mathbf{x})$  ist implizit auf  $\mathcal{G}(1)$  definiert.

zu (b) Als nächstes wird gezeigt, dass das Regelgesetz (11) die Stellgrößenbeschränkung einhält.

Es gilt

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)} |\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p)}.$$

Damit die Stellgrößenbeschränkung eingehalten wird, muss

$$\mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p) \leq u_{\max}^2$$

erfüllt sein. Dies lässt sich mit Hilfe des Schur-Komplementes [7] umformen zu

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{k}^T(p) \\ \mathbf{k}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}.$$

Nach Einsetzen der Definitionen und Rechts- und Linksmultiplikation mit  $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(p) \end{bmatrix}$  ergibt sich daraus Gl. (17c).

zu (c) Nun wird gezeigt, dass Bedingung (iv) erfüllt ist. Ableiten liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial t} &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p)) \mathbf{x} < 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p) < \mathbf{0}.$$

Nach Einsetzen der Gln. (9) und (15) und Rechts- und Linksmultiplikation mit  $\sqrt{p} \cdot \mathbf{D}(p)$  ergibt sich daraus Gl. (17d). Damit ist  $p(\mathbf{x})$  eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des nicht-sättigenden Regelkreises mit dem Regelgesetz (11).

zu (d) Abschließend wird mit Hilfe von Satz 5 der Beweis geführt, dass  $p(\mathbf{x})$  eine implizite Lyapunov-Funktion der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des sättigenden Regelkreises ist. Wir setzen hierzu  $v(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{G}(1)$ ,  $h(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}$  und  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}$ .

Wie bereits unter (b) gezeigt, hält  $u = -\mathbf{k}^T(p) \mathbf{x}$  die Stellgrößenbeschränkung ein. Damit ist Bedingung (A.4) erfüllt.

Die partielle Ableitung der implizit definierten Funktion berechnet sich systemunabhängig zu

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\partial g / \partial \mathbf{x}}{\partial g / \partial p} = - \frac{2\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)}{\partial g / \partial p}.$$

Mit  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x}$  folgt für das nicht-sättigende System

$$\begin{aligned} \dot{p}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{A}}(p)\mathbf{x}} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}}(p) \mathbf{x} \\ &= \frac{\mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{A}}^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}(p)) \mathbf{x}}{\underbrace{-\partial g / \partial p}_{>0}}. \end{aligned}$$

Der Nenner ist positiv, siehe Gl. (18) bzw. (17b). Wie ebenfalls bereits gezeigt, ist der Zähler auf Grund von Gl. (17d) negativ. Somit ist Bedingung (A.5) erfüllt.

Mit  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}_*(p)\mathbf{x}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{p}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{A}}_*(p)\mathbf{x}} &= \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \hat{\mathbf{A}}_*(p) \mathbf{x} \\ &= \frac{\mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{A}}_*^T(p) \mathbf{R}(p) + \mathbf{R}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(p)) \mathbf{x}}{\underbrace{-\partial g / \partial p}_{>0}}. \end{aligned}$$

Schließlich folgt damit und durch Gl. (17e) in gleicher Weise wie zuvor, dass auch Bedingung (A.3) erfüllt ist.

Somit ist  $p(\mathbf{x})$  auch eine Lyapunov-Funktion des geschlossenen Kreises mit  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x}$  bzw. mit  $\text{sat}(f(\mathbf{x})) = \text{sat}(\mathbf{k}_*^T(p) \mathbf{x})$ .  $\square$

### 2.3 Worin besteht die Vereinfachung?

Die Vereinfachung bezieht sich auf Gl. (8). In den vorangehenden Arbeiten [1; 4; 17; 23] lautet ihre Definition

$$g_e(p, \mathbf{x}) = e(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1$$

mit dem zusätzlichen Skalierungsfaktor

$$e(p) = \frac{1}{u_{\max}^2} \mathbf{k}^T(p) \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p).$$

Er dient dazu, die Größe der durch Gl. (10) definierten Ellipsoide  $\mathcal{G}(p)$  zu justieren. Eingeführt wurde er in [1], um eine möglichst gute Ausnutzung des vorhandenen Stellgrößenbereichs zu gewährleisten, ohne dass das Regelgesetz (11) sättigt.

Das nicht-sättigende Regelgesetz (11) dient hier jedoch nur noch zum Nachweis von Stabilität, während das eigentliche Regelgesetz (4) in Sättigung arbeiten kann. Somit ist das Argument der Ausnutzung des vorhandenen Stellgrößenbereichs durch Skalierung der Ellipsoide hinfällig.

Neben der größeren Freiheit bei der Skalierung der Ellipsoide ergibt sich aus mathematischer Sicht ein weiterer Vorteil. Zum Nachweis von Stabilität muss unter anderem

$$\frac{\partial g_e(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0, \tag{22}$$

erfüllt sein, mit dem gegenüber Gl. (18) etwas komplizierteren Ausdruck

$$\frac{\partial g_e(p, \mathbf{x})}{\partial p} = e'(p) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x} + \frac{1}{p} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x}.$$

Aus diesem Grund werden in [1; 4; 17; 23] die Bedingungen

$$\max_{p \in (0,1]} e'(p) \leq 0 \quad \text{und} \quad (23)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} < \mathbf{0} \quad (24)$$

gefordert, die hinreichend zur Erfüllung von Gl. (22) sind. Für bestimmte instabile Strecken kann die Gl. (23) jedoch nicht erfüllt werden, wenn gleichzeitig die Lyapunov-Ungleichung

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 < \mathbf{0} \quad (25)$$

gelten soll. Dies formalisiert

**Satz 2.** Sei die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  in Regelungsnormform gegeben. Wenn der Koeffizient  $a_{n-1} = -\sum_i \lambda_i(\mathbf{A})$  des charakteristischen Polynoms der unregulierten Strecke negativ ist, dann existieren keine Parameter  $\hat{\mathbf{a}}$  und  $\mathbf{R}_1 > \mathbf{0}$ , die gleichzeitig die Bedingungen (23) und (25) erfüllen.

*Beweis.* Elementweise ausgeschrieben hat die symmetrische Matrix  $\mathbf{R}_1^{-1}$  die folgende Gestalt

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Die Ungleichung (25) ist äquivalent zu der Forderung  $\mathbf{L} = -\mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{A}}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{R}_1^{-1} > \mathbf{0}$ . Damit die Matrix  $\mathbf{L}$  positiv definit ist, müssen alle Hauptdiagonalelemente positiv sein. Das gilt insbesondere auch für das Element  $l_{nn} = 2(\hat{a}_0 r_{1n} + \hat{a}_0 r_{1n} + \dots + \hat{a}_{n-1} r_{nn}) > 0$ .

Weiterhin erhalten wir durch Einsetzen der Definitionen und Ableiten

$$e'(p) = -\frac{1}{u_{\max}^2} (\mathbf{a}^T \mathbf{D}(p) - \hat{\mathbf{a}}^T) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \frac{\mathbf{D}(p)}{p} \mathbf{a}.$$

Es ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{p \rightarrow 0} e'(p) = -\frac{1}{u_{\max}^2} a_{n-1} l_{nn}.$$

Für  $a_{n-1} < 0$  ist er nur dann kleiner oder gleich Null, wenn  $l_{nn} \leq 0$ . Dies steht im Widerspruch zu der Forderung  $l_{nn} > 0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Es handelt sich um Strecken, bei denen der Schwerpunkt der Eigenwerte in der rechten komplexen Halbebene liegt, für die also  $\sum_i \lambda_i(\mathbf{A}) > 0$  gilt.

Da hier bei der vereinfachten Variante der Faktor  $e(p)$  in der Selektionsgleichung (8) wegfällt, entfällt diese Einschränkung des Einsatzgebietes, siehe auch das Beispiel in Abschnitt 4.

### 3 LMI-Entwurf

Für den Regelungsentwurf müssen die Matrix  $\mathbf{R}_1$  und der Vektor  $\hat{\mathbf{a}}_*$  festgelegt werden. Der Nachweis von Stabilität erfordert zusätzlich die Bestimmung des Vektors  $\hat{\mathbf{a}}$ . Dies ist mit der nachfolgend beschriebenen Formulierung des Entwurfs als konvexes Optimierungsproblem einfach möglich.

Dazu werden zunächst die Stabilitätsbedingungen in Satz 1 in lineare Matrixungleichungen umgewandelt. Danach wird ein konvexes Gütekriterium vorgestellt.

#### 3.1 Stabilitätsbedingungen

Eine Formulierung der Ungleichungen (17) als lineare Matrixungleichungen ist mit Hilfe der Substitutionen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_* = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}_* \quad (26)$$

möglich.

Die Gln. (17) sind dann äquivalent zu

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad (27a)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{Q} < \mathbf{0}, \quad (27b)$$

$$\forall p \in (0, 1] : \begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{z}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{D}(p) \mathbf{Q} \\ \mathbf{z} - \mathbf{Q} \mathbf{D}(p) \mathbf{a} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0}, \quad (27c)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} - \mathbf{z} \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \mathbf{z}^T < \mathbf{0}, \quad (27d)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0 \mathbf{Q} - \mathbf{z}_* \mathbf{b}^T - \mathbf{b} \mathbf{z}_*^T < \mathbf{0}, \quad (27e)$$

mit  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \mathbf{b} \mathbf{a}^T$ .

Bei der Gl. (27c) handelt es sich wegen  $\mathbf{D}(p)$  um eine polynomial parameterabhängige lineare Matrixungleichung. Mit Hilfe des nachfolgend zitierten Lemmas aus [24] kann polynomial Parameterabhängigkeit eliminiert werden.

#### Lemma 1 (Definitheit eines Matrixpolynoms, [24]).

Für symmetrische  $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , mit  $i = 1, \dots, 2m$ , gilt<sup>3</sup>

$$\forall \tilde{p} \in [-1, 1] : \tilde{\mathbf{S}}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_1 \tilde{p} + \dots + \tilde{\mathbf{S}}_{2m} \tilde{p}^{2m} < \mathbf{0} \quad (28)$$

genau dann, wenn eine positiv definite Matrix  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$  und eine schiefsymmetrische Matrix  $\mathbf{G} + \mathbf{G}^T = \mathbf{0}$ , beide aus  $\mathbb{R}^{nm \times nm}$ , existieren, so dass

$$\tilde{\mathbf{S}}_\Sigma < \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0}_{nm \times n} \\ \mathbf{0}_{nm \times n} & \mathbf{I}_{nm} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0}_{nm \times n} \\ \mathbf{0}_{nm \times n} & \mathbf{I}_{nm} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

<sup>3</sup> Wenn das Matrixpolynom ungerader Ordnung ist, so wird  $\tilde{\mathbf{S}}_{2m} = \mathbf{0}$  gesetzt.

mit

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{\mathbf{S}}_0 & \tilde{\mathbf{S}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{S}}_1 & 2\tilde{\mathbf{S}}_2 & \tilde{\mathbf{S}}_3 & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_3 & 2\tilde{\mathbf{S}}_4 & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \tilde{\mathbf{S}}_{2m-1} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{2m-1} & 2\tilde{\mathbf{S}}_{2m} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

gilt.

Um das Lemma anwenden zu können, wird Gl. (27c)

zu

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{S}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{z}) + \mathbf{S}_1(\mathbf{Q})p + \dots + \mathbf{S}_n(\mathbf{Q})p^n < \mathbf{0}$$

umgeschrieben, wobei die Abhängigkeit der Matrizen  $\mathbf{S}_i$  von den LMI-Variablen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{z}$  affin ist:

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_i(\mathbf{Q}) = -a_{n-i} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{q}_{n+1-i}^T \\ \mathbf{q}_{n+1-i} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

mit  $i = 1, \dots, n$ , wobei mit  $\mathbf{q}_i$  die  $i$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{Q}$  gemeint ist. Dann erfolgt mit  $p = (\tilde{p} + 1)/2$  eine Intervalltransformation<sup>4</sup> von  $p \in [0, 1]$  auf  $\tilde{p} \in [-1, 1]$ . Es ergibt sich nach einigen Rechenschritten

$$\tilde{\mathbf{S}}(\tilde{p}) = \tilde{\mathbf{S}}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{z}) + \tilde{\mathbf{S}}_1(\mathbf{Q})\tilde{p} + \dots + \tilde{\mathbf{S}}_n(\mathbf{Q})\tilde{p}^n < \mathbf{0},$$

mit

$$\tilde{\mathbf{S}}_j(\cdot) = \sum_{i=j}^n 2^{-i} \binom{i}{j} \mathbf{S}_i(\cdot).$$

Die Anwendung von Lemma 1 liefert die zu Gl. (27c) äquivalente lineare Matrixungleichung

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\Sigma}(\mathbf{Q}, \mathbf{z}) < \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0}_{nm \times n} \\ \mathbf{0}_{nm \times n} & \mathbf{I}_{nm} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{nm} & \mathbf{0}_{nm \times n} \\ \mathbf{0}_{nm \times n} & \mathbf{I}_{nm} \end{bmatrix} \quad (31)$$

in den Variablen  $\mathbf{Q}, \mathbf{z}, \mathbf{P}$  und  $\mathbf{G}$ , mit  $\tilde{\mathbf{S}}_{\Sigma}(\mathbf{Q}, \mathbf{z})$  entsprechend Gl. (30). Für gerade Systemordnungen gilt  $m = n/2$  und für ungerade  $m = (n + 1)/2$ .

Diese auf den ersten Blick kompliziert scheinende Prozedur kann mit Hilfe der gängigen LMI-Parser, wie zum Beispiel YALMP [18], sehr einfach automatisiert werden.

Für den Einschluss aller Anfangsbedingungen nach Gl. (3) muss  $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1)$  gelten. Unter der Annahme, dass die Menge  $\mathcal{X}_0$  als ein konvexes Polyeder mit  $N$  Eckpunkten  $\mathbf{v}_j$  gegeben ist, startet das System innerhalb von  $\mathcal{G}(1)$  wenn für  $j = 1, \dots, N$  gilt:

$$g(1, \mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j^T \mathbf{R}_1 \mathbf{v}_j - 1 < 0$$

bzw. mit dem Schur-Komplement [7] und der Substitution (26)

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{v}_j^T \\ \mathbf{v}_j & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (32)$$

<sup>4</sup> Es kann auch von  $p \in [p_{\min}, 1]$  aus transformiert werden, da bei der praktischen Implementierung der Regelung aus numerischen Gründen eine untere Grenze  $p_{\min} > 0$  vorgegeben wird [4; 17]. Es verkomplizieren sich dann die Beziehungen zwischen den  $\tilde{\mathbf{S}}_i$  und  $\tilde{\mathbf{S}}_j$  leicht.

Wir können die Stabilitätsbedingungen in Form linearer Matrixungleichungen zusammenfassen in

**Satz 3.** Wenn positiv definite Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P}$ , eine schiefsymmetrische Matrix  $\mathbf{G}$  und Vektoren  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_*$  existieren, so dass die linearen Matrixungleichungen (27a), (27b), (27d), (27e), (31) und (32) erfüllt sind, dann sind die Ungleichungen (17) in Satz 1 mit  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z}$  und  $\hat{\mathbf{a}}_* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z}_*$  erfüllt. Das heißt, der geschlossene Kreis mit vereinfachter impliziter Regelung ist stabil für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ .

### 3.2 Gütekriterium und Optimierungsproblem

Wie in [17] wird als konvexes Gütemaß eine Abschätzung der Abklingrate des künstlichen Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_{*,1}\mathbf{x}$  verwendet, das heißt des künstlichen, linearen, ungesättigten mit  $p = 1$  geregelten Systems. Die Abklingrate ist als das größte  $\delta$  definiert, so dass für alle Trajektorien

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\delta t} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

gilt. Wenn für eine positiv definite Matrix  $\mathbf{Q}$  und ein positives  $\underline{\delta}$  die Ungleichung

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T + \hat{\mathbf{A}}_{*,1}\mathbf{Q} < -2\underline{\delta}\mathbf{Q}$$

erfüllt ist, so ist  $\underline{\delta} < \delta$  eine untere Abschätzung der Abklingrate. Damit kann die Ungleichung (27e) durch

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0\mathbf{Q} - \mathbf{z}_*\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}_*^T < -2\underline{\delta}\mathbf{Q} \quad (33)$$

ersetzt werden.

Damit bei der Lösung des nachfolgend formulierten Optimierungsproblems keine unsinnig hohen Beträge der Elemente von  $\mathbf{z}_*$  bzw.  $\hat{\mathbf{a}}_*$  entstehen, wird durch die Forderung

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)} |\mathbf{k}_*^T(1)\mathbf{x}| &< \beta \cdot u_{\max} \\ \Leftrightarrow \mathbf{k}_*^T(1)\mathbf{R}_1\mathbf{k}_*(1) &< \beta^2 u_{\max}^2 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta^2 u_{\max}^2 & \mathbf{z}_*^T - \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \\ \mathbf{z}_* - \mathbf{Q}\mathbf{a} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (34)$$

der maximale Betrag der kommandierten Stellgröße begrenzt. Dabei gilt für den Parameter  $\beta \geq 1$ . Dieser Skalar ist der einzige Einstellparameter des Entwurfs und legt eine obere Grenze für den Grad der Sättigung fest.

Zusammengefasst ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\underline{\delta}, \mathbf{Q}, \mathbf{z}, \\ \mathbf{z}_*, \mathbf{P}, \mathbf{G}}} \underline{\delta}, \quad \text{so dass} \\ (27a), (27b), (27d), (31) \text{ bis } (34). \end{aligned} \quad (35)$$

## 4 Beispiele

### 4.1 Tauchtiefenregelung

Die aus [11] stammende Anwendung der Tauchtiefenregelung eines U-Boots dient wie in [3; 4; 17] als Beispiel.

In Regelungsnormform lautet das Modell der Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,005 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u)$$

$$y = x_1,$$

mit der Tauchtiefe  $y$ . Die Stellgrößenbeschränkung beträgt  $u_{\max} = 2,5 \times 10^{-5}$  und das Anfangsgebiet ist zu  $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} : |x_1| \leq 10, |x_2| \leq 0,05, |x_3| \leq 0,0046\}$  festgelegt.

Durch Lösung des konvexen Optimierungsproblems nach Gl. (35) werden die Parameter der vereinfachten impliziten Regelung bestimmt, siehe Anhang. Das Regelgesetz lautet ausgeschrieben

$$u = -\text{sat}\left(1,073 \times 10^{-7} p^{-3} x_1 + 4,919 \times 10^{-5} p^{-2} x_2 + (10,4078 p^{-1} - 5) \times 10^{-3} x_3\right),$$

wobei der Selektionsparameter  $p \in (0, 1]$  mit Hilfe der Gleichung

$$g(p, \mathbf{x}) \cdot p^{2n} = c_0(\mathbf{x}) + c_1(\mathbf{x})p + \dots + c_6(\mathbf{x})p^6 = 0,$$

mit

$$c_0(\mathbf{x}) = 1,6021 \times 10^{-5} x_1^2, \quad c_1(\mathbf{x}) = 6,5397 \times 10^{-3} x_1 x_2,$$

$$c_2(\mathbf{x}) = 0,80629 x_1 x_3 + 1,5666 x_2^2,$$

$$c_3(\mathbf{x}) = 326,93 x_2 x_3, \quad c_4(\mathbf{x}) = 40713 x_3^2,$$

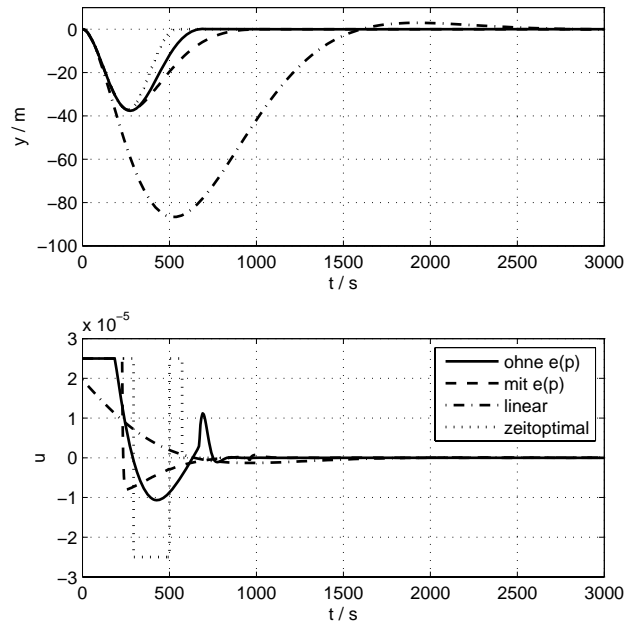
$$c_5(\mathbf{x}) = 0, \quad c_6(\mathbf{x}) = -1$$

aus dem aktuellen Zustand bestimmt wird. Dies ist einfach und sicher möglich durch Anwendung eines Bisektionsverfahrens, denn da die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt sind, ist gewährleistet, dass das Polynom  $g(p, \mathbf{x}) \cdot p^{2n}$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$  nur eine einzige reelle Nullstelle im Intervall  $(0, 1]$  aufweist.

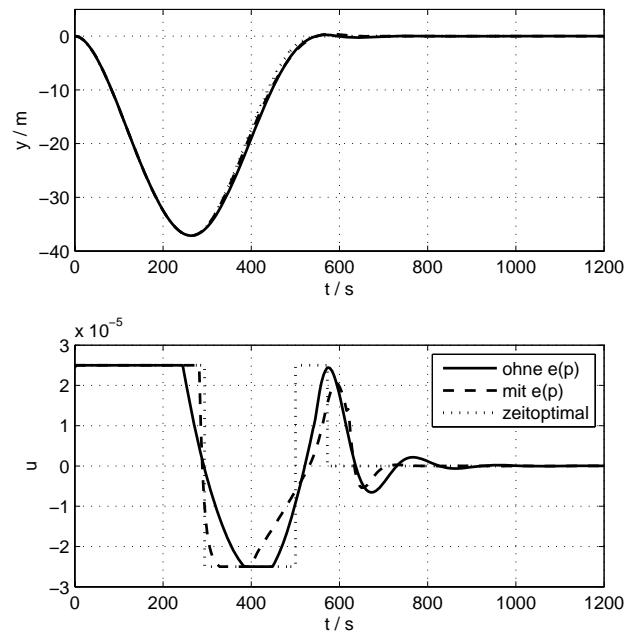
Bild 2 zeigt Regel- und Stellgrößenverlauf für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [0, 0, -0,004]$ . Zum Vergleich sind auch die Verläufe der konvex optimierten Regelung aus [17], d.h. der impliziten Regelung mit dem Skalierungsfaktor  $e(p)$  in der Selektionsstrategie, angegeben. Die vereinfachte implizite Regelung liegt deutlich näher am theoretisch möglichen zeitoptimalen Fall [3]. Dies ist im Hinblick auf die in Abschnitt 2.3 gemachten Aussagen zu erwarten. Die impliziten Regelungen besitzen weiterhin den Vorteil eines stetigen Stellgrößenverlaufs. Sehr viel langsamer als beide implizite Regelungen ist die nicht in Sättigung gehende lineare Regelung aus [17].

Neben der konvexen Optimierung mittels LMIs wird in [17] auch ein Regler durch Lösen eines nicht-konvexen Optimierungsproblems mittels einer Evolutionsstrategie bestimmt, siehe Anhang, um das Potenzial der sättigenden, impliziten Regelung zu demonstrieren. Als Gütemaß dient dort

$$\sum_i \frac{1}{T^4} \int_0^T |y_i(t)| \cdot t^4 dt, \quad (36)$$



**Bild 2** Tauchtiefe  $y$  und Stellgröße  $u$  für die mittels LMIs optimierten impliziten Regelungen ohne und mit Skalierungsfaktor  $e(p)$  in der Selektionsstrategie  $g(p, \mathbf{x}) = 0$ , Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [0, 0, -0,004]$ . Zum Vergleich sind auch der zeitoptimale Verlauf und der Verlauf der Größen für einen linearen, ungesättigten Regler aus [17] angegeben. Die vereinfachte implizite Regelung ist deutlich schneller als die alte Variante.



**Bild 3** Tauchtiefe  $y$  und Stellgröße  $u$  bei den mittels Evolutionsstrategie optimierten Regelungen ohne und mit Skalierungsfaktor  $e(p)$  in der Selektionsstrategie  $g(p, \mathbf{x}) = 0$  für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [0, 0, -0,004]$ . Beide Regelungen erreichen einen fast zeitoptimalen Verlauf [3].

mit ausreichend großer Simulationszeit  $T$  und dem zum Anfangswert  $\mathbf{x}_{0,i}$  gehörenden Verlauf der Regelgröße  $y_i(t)$ , wobei die Anfangswerte  $\mathbf{x}_{0,i}$  alle Ecken des Anfangsgebietes  $\mathcal{X}_0$  durchlaufen.

Der in Bild 3 dargestellte Ausregelprozess zeigt, dass die impliziten Regelungen ohne und mit Skalierungsfaktor  $e(p)$  äußerst nah am theoretisch möglichen zeitoptimalen Verlauf liegen. Fast zeitoptimales Ausregelverhalten ist also auch mit der vereinfachten Regelung möglich.

### 4.2 Instabile Strecke

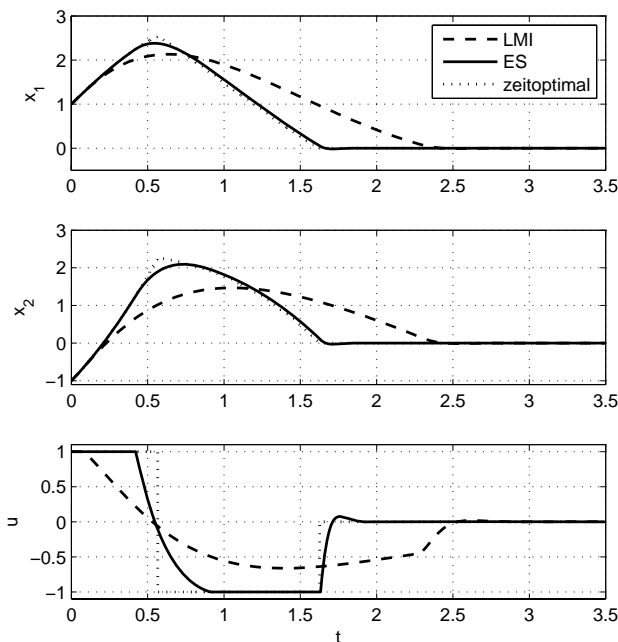
Als Beispiel dafür, dass nun auch instabile Strecken, deren Eigenwertschwerpunkt in der rechten komplexen Halbebene liegt, geregelt werden können, dient eine Strecke aus [14]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{sat}(u).$$

Die Stellgrößenbeschränkung beträgt  $u_{\max} = 1$  und das Anfangsgebiet ist zu  $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$  festgelegt.

Die Systemmatrix besitzt ein instabiles, konjugiert komplexes Polpaar bei  $\lambda_{1,2} = 0,6 \pm 0,8j$ . Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, ist für diese Strecke kein Entwurf für die impliziten Regelungen aus den vorangehenden [1; 4; 17; 23] Arbeiten möglich. Für die hier vorgestellte vereinfachte implizite Regelung wird die Systembeschreibung in Steuerungsnormalform transformiert.

Danach erfolgt wie beim Beispiel der Tauchtiefenregelung die Bestimmung der Reglerparameter sowohl durch Lösung des konvexen Optimierungsproblems nach Gl. (35) als auch durch Lösen des nicht-konvexen Problems mit dem Gütemaß nach Gl. (36) mittels Evolutionsstrategie, siehe Anhang. Bild 4 zeigt die



**Bild 4** Zustands- und Stellgrößenverlauf für die Regelungen der instabilen Strecke, LMI-basierter Entwurf und Entwurf mittels Evolutionsstrategie (ES), Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [1, -1]$ . Zum Vergleich ist auch der zeitoptimale Verlauf der Größen angegeben [3].

Zustands- und Stellgrößenverläufe für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^T = [1, -1]$  in den Originalkoordinaten  $x_1$  und  $x_2$ . Mit dem LMI-basierten Entwurf ist ein schnelles Ausregelverhalten möglich. Die Optimierung der Reglerparameter mittels Evolutionsstrategie führt auf fast zeitoptimale Verläufe.

## 5 Zusammenfassung

Dieser Beitrag stellt eine vereinfachte Version der sättigenden, weichen strukturvariablen Regelung mit verbessertem Ausregelverhalten vor. Damit ist erstmals die Anwendung dieses Regelungstyps bei instabilen Strecken möglich, deren Eigenwertschwerpunkt in der rechten komplexen Halbebene liegt.

Für den Regelungsentwurf wird ein konvexes Optimierungsproblem angegeben. Die damit entworfenen vereinfachten Regelungen sind schneller als die alten Varianten. Dies wird anhand des Beispiels einer Tauchtiefenregelung demonstriert. Des Weiteren wird eine vereinfachte implizite Regelung für ein instabiles System entworfen, für die der Entwurf der alten Variante gar nicht möglich ist.

Durch Lösen eines nicht konvexen Optimierungsproblems mit Hilfe einer Evolutionsstrategie werden für beide Strecken noch schnellere Regelungen mit praktisch zeitoptimaler Performance entworfen.

## A Anhang

### A.1 Reglerparameter

**Tauchtiefenregelung.** Für die konvexe Optimierung wurde der Begrenzungsparameter  $\beta = 2$  gewählt. Es ergeben sich unter der Verwendung des Parsers YALMIP [18] und des Solvers SeDuMi [20] die Reglerparameter zu

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [4,4469 \times 10^{-8} \quad 2,3073 \times 10^{-5} \quad 4,9148 \times 10^{-3}],$$

$$\hat{\mathbf{a}}_*^T = [1,073 \times 10^{-7} \quad 4,919 \times 10^{-5} \quad 10,4078 \times 10^{-3}],$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1,6021 \times 10^{-5} & 3,2698 \times 10^{-3} & 0,4031 \\ 3,2698 \times 10^{-3} & 1,5666 & 163,46 \\ 0,4031 & 163,46 & 40,713 \end{bmatrix}.$$

Bei nichtkonvexer Optimierung mittels Evolutionsstrategie ergeben sich die Reglerparameter zu

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [5,7697 \times 10^{-8} \quad 2,6569 \times 10^{-5} \quad 4,8796 \times 10^{-3}],$$

$$\hat{\mathbf{a}}_*^T = [2,0102 \times 10^{-7} \quad 6,9676 \times 10^{-5} \quad 9,0087 \times 10^{-3}],$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2,004 \times 10^{-5} & 3,8188 \times 10^{-3} & 0,3532 \\ 3,8188 \times 10^{-3} & 1,8053 & 161,12 \\ 0,3532 & 161,12 & 41,456 \end{bmatrix}.$$

**Instabile Strecke.** Für die konvexe Optimierung wurde der Begrenzungsparameter  $\beta = 3$  gewählt. Es ergeben sich



unter der Verwendung des Parsers YALMIP [18] und des Solvers SeDuMi [20] die Reglerparameter zu

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [1,2137 \quad 0,4106], \quad \hat{\mathbf{a}}_*^T = [1,5512 \quad 1,7995],$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 3,1831 & 1,0615 \\ 1,0615 & 2,7592 \end{bmatrix}.$$

Bei nichtkonvexer Optimierung mittels Evolutionsstrategie ergeben sich die Reglerparameter zu

$$\hat{\mathbf{a}}^T = [1,6770 \quad 0,2960], \quad \hat{\mathbf{a}}_*^T = [5,2711 \quad 3,5121],$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4,2314 & 0,6573 \\ 0,6573 & 2,2766 \end{bmatrix}.$$

## A.2 Sätze

Nachfolgend sind die beiden im Beweis von Satz 1 verwendeten Sätze zitiert und kurz kommentiert. Für deren Beweis und ausführliche Diskussionen sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

**Satz 4 (Implizite Lyapunov-Funktionen, [1; 2]).** Die Differenzialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  mit der Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung  $\mathcal{U}_1$  des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere in einer Menge

$$\mathcal{H} = \{(p, \mathbf{x}) : 0 < p \leq 1, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

wobei  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$  ebenfalls eine Umgebung des Ursprungs sei, eine stetige Funktion  $g(p, \mathbf{x})$ , so dass gilt:

- (i) Für  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  resultiert aus  $g(p, \mathbf{x}) = 0$  der Grenzübergang  $p \rightarrow 0^+$ ,
- (ii)  $\lim_{p \rightarrow 0^+} g(p, \mathbf{x}) > 0$  und  $\lim_{p \rightarrow 1^-} g(p, \mathbf{x}) < 0$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

Sind dann die beiden Bedingungen

- (iii)  $-\infty < \frac{\partial g(p, \mathbf{x})}{\partial p} < 0$  für alle  $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$  und
- (iv)  $\frac{\partial g(p, \mathbf{x}(t))}{\partial t} < 0$  für alle  $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$ , mit  $g(p, \mathbf{x}) = 0$ ,

erfüllt, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung  $g(p, \mathbf{x}) = 0$  in  $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$  eine Funktion  $p$  mit  $0 < p(\mathbf{x}) < 1$  implizit definiert, die in  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  durch  $p(\mathbf{0}) = 0$  stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist in  $\mathcal{U}_0$  eine Lyapunov-Funktion für das System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

Die Bedingungen (ii) und (iii) stellen sicher, dass mit  $g(p, \mathbf{x}) = 0$  implizit eine Funktion  $p(\mathbf{x})$  definiert ist. Bedingung (i) ermöglicht die stetige Erweiterung dieser Funktion im Koordinatenursprung. Mit Bedingung (iv) wird die Stabilität des dynamischen Systems nachgewiesen.

Für den zweiten verwendeten Satz ist der Begriff der kontraktiven Invarianz von zentraler Bedeutung.

**Definition 1 (Kontraktive Invarianz, [12]).** Sei mit Hilfe der positiv definiten Funktion  $v(\mathbf{x})$ , das heißt  $v(\mathbf{x}) > 0$  für

alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  und  $v(\mathbf{0}) = 0$ , eine beschränkte Menge

$$\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) < \alpha\}$$

definiert und ein dynamisches System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  gegeben. Die Menge  $\mathcal{V}(\alpha)$  heißt kontraktiv invariant, wenn

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \text{grad}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0 \quad (\text{A.1})$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha) \setminus \{\mathbf{0}\}$  gilt.

Wenn die Menge  $\mathcal{V}(\alpha)$  kontraktiv invariant ist, dann ist  $v(\mathbf{x})$  offensichtlich eine Lyapunov-Funktion der Ruhelage des Systems.

**Satz 5 (Stabilität von Regelkreisen mit Sättigung, [17]).** Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \quad \text{mit } u = -\text{sat}(f(\mathbf{x})), \quad (\text{A.2})$$

eine positiv definite Funktion  $v(\mathbf{x})$  und eine beschränkte Menge

$$\mathcal{V}(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) < \alpha\},$$

so dass die Ungleichung

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})f(\mathbf{x})) < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha) \setminus \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.3})$$

gilt. Die Menge  $\mathcal{V}(\alpha)$  ist genau dann kontraktiv invariant für das obige System, wenn eine Funktion  $h(\mathbf{x})$  existiert, so dass  $\mathcal{V}(\alpha)$  kontraktiv invariant unter der Rückführung  $u = -h(\mathbf{x})$  ist, d. h.

$$|h(\mathbf{x})| \leq u_{\max}, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha), \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mathbf{x})h(\mathbf{x})) < 0, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathcal{V}(\alpha) \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (\text{A.5})$$

Der Satz besagt im Wesentlichen das Folgende. Unter Vernachlässigung der Stellgrößenbeschränkung existiere für zwei Regelkreise mit den Regelgesetzen  $u = -h(\mathbf{x})$  und  $u = -f(\mathbf{x})$  innerhalb einer Menge eine gemeinsame Lyapunov-Funktion  $v(\mathbf{x})$ . Wenn  $u = -h(\mathbf{x})$  innerhalb der Menge die Stellgrößenbeschränkung einhält, so ist der Regelkreis mit  $u = -\text{sat}(f(\mathbf{x}))$  ebenfalls stabil, unabhängig davon, ob dieses Regelgesetz in Sättigung geht oder nicht.

## Literatur

- [1] ADAMY, J.: Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Lyapunov-Funktionen. Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 8, Nr. 271, VDI Verlag, Düsseldorf, Universität Dortmund, Diss., 1991.
- [2] ADAMY, J.: Implicit Lyapunov functions and isochrones of linear systems. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 50 (2005), Nr. 6, S. 874–879.
- [3] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009.
- [4] ADAMY, J.; FLEMMING, A.: Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), Nr. 11, S. 1821–1844.
- [5] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2005.
- [6] BERNSTEIN, D. S.; MICHEL, A. N.: A chronological bibliography on saturating actuators. In: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 5 (1995), Nr. 5, S. 375–380.

- [7] BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V.: *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [8] BUHL, M.; JOOS, P.; LOHMANN, B.: Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *at* 56 (2008), S. 316–323.
- [9] DEDONA, J.; GOODWIN, G.; MOHEIMANI, S.: Combining switching, over-saturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 7, S. 1153–1162.
- [10] GOKCEK, C.; KABAMBA, P.; MEERKOV, S.: An LQR/LQG theory for systems with saturating actuators. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 46 (2001), Nr. 10, S. 1529–1542.
- [11] GUTMAN, P. O.; HAGANDER, P.: A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 22–33.
- [12] HU, T.; LIN, Z.: *Control systems with actuator saturation*. Birkhäuser, 2001.
- [13] HU, T.; LIN, Z.: On improving the performance with bounded continuous feedback laws. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 47 (2002), Nr. 9, S. 1570–1575.
- [14] HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M.: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 2, S. 351–359.
- [15] KAPILA, V. (Hrsg.); GRIGORIADIS, K. (Hrsg.): *Actuator saturation control*. New York: Marcel Dekker, Inc., 2002.
- [16] KIENDL, H.: *Suboptimale Regler mit abschnittsweise linearer Struktur*. Springer, 1972.
- [17] LENS, H.; ADAMY, J.: Schnelle Regelung von Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *at* 57 (2009), S. 70–79.
- [18] LÖFBERG, J.: YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proc. CACSD Conf.* Taipei, Taiwan, 2004.
- [19] MEGRETSKI, A.:  $L_2$  BIBO output feedback stabilization with saturated control. In: *13th Triennial World Congress*. San Francisco, 1996, S. 435–440.
- [20] STURM, J.: Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. In: *Optimization Methods and Software* (1999), S. 625–653.
- [21] TARBOURIECH, S. (Hrsg.); GARCIA, G. (Hrsg.): *Control of uncertain systems with bounded inputs*. Springer, 1997.
- [22] TARBOURIECH, S. (Hrsg.); GARCIA, G. (Hrsg.); GLATTFELDER, A. H. (Hrsg.): *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. Springer, 2007.
- [23] YANKULOVA, D.; ADAMY, J.: LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. In: *at* 56 (2008), S. 636–643.
- [24] ZHANG, X.: *Parameter-dependent Lyapunov functions and stability analysis of linear parameter-dependent dynamical systems*, Georgia Institute of Technology, Diss., 2003.

Manuskripteingang: 27. November 2009



**Dipl.-Ing. Boris Jasniewicz** hat am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik im Bereich nichtlineare Regelungen promoviert. Hauptarbeitsgebiet: weiche strukturvariable Regelungen.

Adresse: Fraunhofer Institut für Windenergie und Energiesystemtechnik (IWES), Bereich Regelungstechnik und Energiespeicher, Königstor 59, D-34119 Kassel,  
E-Mail: boris.jasniewicz@iwes.fraunhofer.de



**Prof. Jürgen Adamy** ist Leiter des Fachgebietes Regelungstheorie und Robotik im Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt. Hauptarbeitsgebiete: Regelungsverfahren, computational Intelligence, autonome mobile Roboter.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, D-64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151 16 2507,  
E-Mail: adamy@rtr.tu-darmstadt.de



**Dipl.-Ing. Dilyana Domont-Yankulova** hat am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik im Bereich nichtlineare Regelungen promoviert. Hauptarbeitsgebiet: Entwurfsverfahren für weiche strukturvariable Regelungen.

Adresse: Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik, Landgraf-Georg-Str. 4, D-64283 Darmstadt, Fax: +49-(0)6151 16 2507,  
E-Mail: yankulova@rtr.tu-darmstadt.de